

目 录

第一章 高维布朗运动与牛顿位势	1
§ 1. 势论大意	1
§ 2. 布朗运动略述	7
§ 3. 首中时与首中点	17
§ 4. 调和函数	27
§ 5. Dirichlet 问题	34
§ 6. 禁止概率与常返集	42
§ 7. 测度的势与 Balayage 问题	49
§ 8. 平衡测度	54
§ 9. 容度	62
§ 10. 暂留集的平衡测度	66
§ 11. 极集	72
§ 12. 末遇分布	78
§ 13. 格林 (Green) 函数	88
第二章 二维布朗运动与对数位势	96
§ 14. 对数位势的基本公式	96
§ 15. 平面 Green 函数	105
§ 16. 对数势	108
§ 17. 平面上的容度	113
§ 18. 结束语	120
参考文献	122

第一章 高维布朗运动与牛顿位势

§ 1. 势论大意

(一) 势论的物理背景. 古典势论起源于物理, 后来抽象成为数学的一分支. 根据电学中的库仑定律, 两个异性电荷互相吸引, 引力方向在其联线上, 力的大小为

$$F = c \cdot \frac{Qq}{r^2},$$

其中 Q 与 q 分别为二电荷的数量, r 为二者在 R^3 中的距离, c 为某常数, 与单位有关. 为了研究引力, 最好引进势的概念. 设在 x_0 处有一电荷 q_0 , 它在任一点 x ($x \neq x_0$) 处所产生的势, 等于把一单位电荷从无穷远移到点 x 处所作的功. 势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关. 势的值为

$$\frac{1}{2\pi} \frac{q_0}{|x - x_0|}. \quad (1)$$

常数 $1/2\pi$ 依赖于单位的选择, 并非本质.

今设有 m 个电荷 q_i , 分别位于点 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$), 可视为

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ q_1, & q_2, & \dots, & q_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

为一离散的电荷分布. 这组电荷在点 x ($x \neq x_i$) 处所产生的势仍定义为把单位电荷自无穷远处移到 x 所作的功. 由于力和功都是可加的, 故此势为

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{|x - x_i|}. \quad (3)$$

现在假设电荷按照测度 μ 分布，由上式的启发，自然称由 μ 所产生的在点 x 的势为

$$G\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^3} \frac{\mu(dy)}{|x-y|}. \quad (4)$$

以后会证明，如 $\mu(R^3) < \infty$ ，则关于勒贝格测度 L ，对几乎一切 x ， $G\mu(x) < \infty$ （见引理 3）。

(4) 式定义一积分变换 G ，它把测度 μ 变为函数 $G\mu$ 。下面会看到，变换的核 $1/2\pi|x-y|$ 恰好等于三维布朗运动转移密度对时间 t 的积分。这正是把布朗运动与牛顿位势联系起来的桥梁之一。

在物理中，势论所研究的，主要是电荷分布 μ 、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系。作为这种量的例，可举出电荷分布 μ 的能 I_μ (energy)，它是势对此 μ 的积分，即

$$I_\mu = \int_{R^3} G\mu(x) \mu(dx) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^3} \int_{R^3} \frac{\mu(dy) \mu(dx)}{|x-y|}. \quad (5)$$

电荷分布的全电荷是 $Q = \mu(R^3)$ 。如果把全部电荷 Q 散布在某导体上，它们便会重新分布，使得在此导体所占的集 A 上，势是一常数。记此新分布为 μ_0 ，它具有下列能的极小性：

$$I_{\mu_0} = \min_{\mu} (I_\mu : \mu(R^3) = Q, \mu \subset A),$$

其中 μ 表 μ 的支集 (support)，它是一切使 $\mu(U) = 0$ 的开集 U 的补集。 μ_0 所决定的分布形态，在物理中称为平衡态。对紧集 $E (\subset R^3)$ ，如存在 μ 使 $\mu \subset E$ ，而且 $G\mu(x) = 1, (\forall x \in E)$ ，则称 $G\mu$ 为 E 的平衡势；具有平衡势的集称为平衡集；而 $\mu(E)$ 则称为 E 的容度，记为 $C(E)$ 。因此，导体 E 的容度，是为了在此导体上产生单位势的全电荷。以上诸概念来自物理，以后还要从数学上重新定义。下

面简述古典势论中的一些结果，其中有些以后会用概率方法加以证明。下设 μ 为有穷测度。

电荷分布的唯一性：势 $G\mu$ 唯一决定 μ 。

势的决定： $G\mu$ 被它在 $\mathcal{L}\mu$ 上的值所决定。

平衡势唯一：一集最多有一平衡势。

平衡势的刻画：设平衡集 E 的平衡势为 $G\mu_0$ ，则

$$G\mu_0(x) = \inf(G\mu(x); G\mu(x) \geq 1, \forall x \in E). \quad (6)$$

平衡势的能：如平衡集 E 的能有穷，则在所有支集含于 E 、全电荷等于 E 的容量的电荷分布 μ 所对应的势中，平衡势 $G\mu_0$ 的能 $I\mu_0$ 极小；即

$$I\mu_0 = \int_{R^3} (G\mu_0) d\mu_0 = \min_{G\mu} \left(\int_{R^3} (G\mu) d\mu; \mathcal{L}\mu \subset E, \mu(E) = C(E) \right). \quad (7)$$

控制原理：对于二势 $h = G\mu$, $\bar{h} = G\bar{\mu}$ ，如处处有 $h \geq \bar{h}$ ，则 $\mu(R^3) \geq \bar{\mu}(R^3)$ 。

投影 (Balayage) 原理：设已给势 $h = G\mu$ 及闭集 E ，则存在势 $\bar{h} = G\bar{\mu}$ ，满足

$$\bar{h}(x) = h(x), (\forall x \in E); \bar{h}(x) \leq h(x), (\forall x \in R^3); \quad (8)$$

$$\mathcal{L}\bar{\mu} \subset E; \bar{\mu}(R^3) \leq \mu(R^3). \quad (9)$$

此外，还满足： $\forall x$

$$\bar{h}(x) = \inf_v (Gv(x); Gv(x) \geq h(x), \forall x \in E; \mathcal{L}v \subset E) \quad (10)$$

$$= \sup_v (Gv(x); Gv(x) \leq h(x), \forall x \in E; \mathcal{L}v \subset E). \quad (11)$$

称 \bar{h} 为 h 的投影势 (Balayage potential)。

下包络原理：诸势的逐点下确界也是势。

(二) 若干引理. 考虑 n 维欧氏空间 R^n , 其中的点记为

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 它与原点的距离为 $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. 对

$r > 0$, 记

$$B_r = \{x: |x| \leq r\}; \quad \dot{B}_r = \{x: |x| < r\};$$

$$S_r = \{x: |x| = r\}.$$

它们分别是以原点为中心、 r 为半径的球, 开球和球面.

引理 1. 设 $f(y)$ 为一元函数, $y \geq 0$, 如下式左方积分存在, 则

$$\int_{B_r} f(|x|) dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^r s^{n-1} f(s) ds. \quad (12)$$

其中 Γ 表 Gamma 函数.

证. 为计算

$$\int_{B_r} f(|x|) dx = \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

引进极坐标

$$x_1 = s \cos \varphi_1, \quad x_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots,$$

$$x_n = s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

$$\begin{aligned} \int_{B_r} f(|x|) dx &= \int_0^r s^{n-1} f(s) ds \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \\ &\cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \cdot \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

利用公式

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

化简后即得(12)_#

在(12)中取 $f = 1$, 并利用公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (13)$$

即得球 B_r 的体积 $|B_r|$ 为

$$|B_r| = \pi^{n/2} r^n / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \quad (14)$$

对 r 微分, 得球面 S_r 的面积 $|S_r|$ 为

$$|S_r| = 2\pi^{n/2} r^{n-1} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \quad (15)$$

球面 S_r 上的勒贝格测度记为 $L_{n-1}(dx)$. 以 $U_r(dx)$ 表 S_r 上的均匀分布, 即

$$U_r(dx) = L_{n-1}(dx) / |S_r|. \quad (16)$$

系 1. 设函数 $K(x)$ ($x \in R^n$) 的积分有意义, 则

$$\int_{R^n} K(x) dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \left[\int_{S_r} K(x) U_r(dx) \right] r^{n-1} dr. \quad (17)$$

证. 左方积分等于

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{S_r} K(x) L_{n-1}(dx) dr \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{S_r} K(x) U_r(dx) \right] |S_r| dr, \end{aligned}$$

以(15)代入即得(17)_#

引理 2. 下列积分是 y 的有界函数

$$A(y) = \int_{B_r} \frac{dx}{|x-y|^{n-2}} \quad (n \geq 2). \quad (18)$$

证. 以 $\chi_D(x)$ 表集 D 的示性函数, 它等于 1 或 0, 视 $x \in D$ 或 $x \notin D$ 而定. 则对任意 $\delta > 0$, 有

$$A(y) = \int_{R^n} \frac{\chi_{B_r}(x)}{|x-y|^{n-2}} dx = \int_{R^n} \frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}} dx$$

$$\leq \int_{|x| \leq \delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}} + \int_{|x| > \delta} \frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}} dx.$$

由(12), 右方第一积分等于 $\pi^{n/2} \delta^2 / \Gamma(n/2)$; 第二积分不大于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{|x| > \delta} \chi_{B_r}(x+y) dx &\leq \frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{R^n} \chi_{B_r}(x+y) dx \\ &= \frac{|B_r|}{\delta^{n-2}} \quad \# \end{aligned}$$

注 1. 其实, 易见 $A(y)$ 的上确界在 $y = 0$ 达到.

以 “ ν -a. e.” 表“关于测度 ν 几乎处处”; 以 \mathscr{B}^n 表 R^n 中全体 Borel 集所成的 σ 代数; (R^n, \mathscr{B}^n) 上的勒贝格测度记为 L .

引理 3. 设 μ 为 (R^n, \mathscr{B}^n) 上有穷测度, $n \geq 2$, 则

$$\int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}} < \infty \quad (L\text{-a.e.}), \quad (19)$$

证. 以 K 表(18)中 $A(y)$ 的一上界, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}} dy &= \int_{R^n} \left(\int_{B_r} \frac{dy}{|x-y|^{n-2}} \right) \mu(dx) \\ &\leq K \mu(R^n) < \infty. \end{aligned}$$

故(19)中积分在 B_r 上有穷 (L -a.e.), 再由 $R^n = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$ (r 为正整数), 即得证(19) #

以 C_0 表 R^n 上全体连续且满足 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 的函数 $f(x)$ 的集.

引理 4. 设 $f \in C_0$ 而且 L -可积, 则当 $n \geq 3$, 有

$$g(y) = \int_{R^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-2}} dx \in C_0.$$

证.

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_{R^n} \frac{f(y+x) - f(y_0+x)}{|x|^{n-2}} dx \right| \\
&\leq 2\|f\| \int_{|x|<\delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}} + \frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{|x|\geq\delta} |f(y+x) \\
&\quad - f(y_0+x)| dx, \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 如引理 2 证明所述, 可选 $\delta > 0$ 充分小, 使 (20) 中右方第一项小于 $\varepsilon/2$. 固定此 δ , 由勒贝格收敛定理, 当 $y \rightarrow y_0$ 时, 第二项趋于零. 此得证 $g(y)$ 的连续性.

为证 $\lim_{|y| \rightarrow \infty} g(y) = 0$, 任取 $0 < r < s$, 则

$$g(y) = \left(\int_{|x|>r} + \int_{s>|x|>r} + \int_{r>|x|} \right) \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}} dx.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 f 可积, 可选 s 充分大, 以使

$$\left| \int_{|x|>s} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}} dx \right| \leq \frac{1}{s^{n-2}} \int_{R^n} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3};$$

次取 r 充分小, 以使

$$\left| \int_{r>|x|} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}} dx \right| \leq \|f\| \int_{r>|x|} \frac{dx}{|x|^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{3};$$

最后

$$\left| \int_{s>|x|>r} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}} dx \right| \leq \frac{1}{r^{n-2}} \int_{s>|x|} |f(x+y)| dx.$$

由于 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 存在 $a > 0$, 当 $|y| > a$ 时, 上式右方项小于 $\varepsilon/3$. 综合上述, 当 $|y| > a$ 时, $|g(y)| < \varepsilon$.

§ 2. 布朗运动略述

(一) 定义. 设 (Q, \mathscr{F}, P) 为概率空间, 其中 $Q = (\omega)$ 是基本事件 ω 所成的集, \mathscr{F} 为 Q 中子集的 σ 代数, P 为 \mathscr{F} 上

的概率测度. 考虑定义在此空间上的随机过程 $\{x(t, \omega), t \geq 0\}$, 它取值于 R^n . 有时也记 $x(t, \omega)$ 为 $x_t(\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t .

称 X 为 n 维布朗运动, 如果它满足:

(i) 对任意有限多个数 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$,

$$x(t_1), x(t_2) - x(t_1), \cdots, x(t_m) - x(t_{m-1})$$

相互独立;

(ii) 对任意 $s \geq 0, t > 0$, 增量 $x(s+t) - x(s)$ 有 n 维正态分布, 密度为

$$p(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad (x \in R^n); \quad (1)$$

(iii) 对每一固定的 $\omega, t \rightarrow x(t, \omega)$ 连续.

这样的过程的确存在(证可参看文献 [22] § 3.4 或 [17]).

(1) 式给出 $x_{s+t} - x_s$ 的密度; 至于 x_t 的分布, 则依赖于开始分布, 即 x_0 的分布. 设

$$\mu(A) = P(x_0 \in A), \quad A \in \mathscr{B}^n.$$

由 $x_t = (x_t - x_0) + x_0$ 及 (i) 和卷积公式, 得

$$P(x_t \in A) = \int_A \left[\int_{R^n} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) \mu(dy) \right] dx. \quad (2)$$

为了强调开始分布 μ 的作用, 记

$$P_\mu(x_t \in A) = P(x_t \in A). \quad (3)$$

引理 1 (正交不变性). 设 H 是 R^n 中正交变换, 则 $HX = \{Hx_t, t \geq 0\}$ 也是 n 维布朗运动.

证. $Hx_{s+t} - Hx_s = H(x_{s+t} - x_s)$

只依赖于 $x_{s+t} - x_s$, 故由 X 的增量独立性即得 HX 的增量独立性. 其次, X 对 t 连续, 故 HX 亦然. 最后, 由 (1), $x_{s+t} - x_s$ 有特征函数为

$$E e^{i(x_{s+t}-x, y)} = e^{-(y, y)t/2}, \quad (y \in R^n). \quad (4)$$

由于正交变换保持内积不变, 并利用(4)以及 H^{-1} 也是正交变换, 得

$$\begin{aligned} E e^{i(H(x_{s+t}-x), y)} &= E e^{i(x_{s+t}-x, H^{-1}y)} \\ &= e^{-(H^{-1}y, H^{-1}y)t/2} = e^{-(y, y)t/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

故 $Hx_{s+t} - Hx_s$ 也有分布密度为(1)_B

类似易见:

平移不变性. 设定点 $a \in R^n$, 则 $\{x_t + a, t \geq 0\}$ 也是布朗运动;

尺度不变性. 设常数 $c > 0$, 则 $\left\{\frac{x(ct)}{\sqrt{c}}, t \geq 0\right\}$ 也是布朗运动.

(二) 转移密度 $p(t, x, y)$ 的性质. 定义

$$p(t, x, y) = p(t, y - x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right), \quad (6)$$

其中 $t > 0, x \in R^n, y \in R^n$. 由(2)可见, 如 $x_0(\omega) = x$, 或 μ 集中在点 x 上, 并记 P_x 为 P_x , 则有

$$P_x(x_t \in A) = \int_A p(t, x, y) dy. \quad (7)$$

故直观上可理解 $p(t, x, y)$ 为: 作布朗运动的粒子, 自点 x 出发, 于时刻 t 转移到点 y 附近的转移密度. 显然, 它关于 x, y 是对称的.

下列简单定理是布朗运动与牛顿位势重要联系之一, 因为 $g(x, y)$ 正是牛顿位势的核 ($n \geq 3$ 时).

定理 1.¹⁾

1) 理解 $\frac{a}{0} = \infty, (a > 0)$.

$$g(x, y) \equiv \int_0^\infty p(t, x, y) dt = \begin{cases} c_n/|x-y|^{n-2}, & (n \geq 3); \\ \infty, & (n \leq 2), \end{cases} \quad (8)$$

其中 c_n 为常数:

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2\pi^{n/2}} = \begin{cases} 1/2\pi, & n = 3 \text{ 时}, \\ 1/2\pi^2, & n = 4 \text{ 时}, \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)/(2\pi)^k, & n = 2k+1 > 3 \text{ 时}, \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2)/2\pi^k, & n = 2k > 4 \text{ 时}. \end{cases} \quad (9)$$

证. 对 $s > 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_0^s p(t, x) dt &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^s \frac{1}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) dt \\ &= \frac{|x|^{2-n}}{2\pi^{n/2}} \int_{\frac{|x|^2}{2s}}^\infty u^{(n/2)-2} e^{-u} du, \quad \left(u = \frac{|x|^2}{2t}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

注意当且只当 $a > 0$ 时, $\int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du$ 收敛. 在上式中令 $s \rightarrow \infty$, 即得

$$\int_0^\infty p(t, x) dt = \begin{cases} c_n/|x|^{n-2}, & (n \geq 3); \\ \infty, & (n \leq 2), \end{cases} \quad (11)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_0^\infty u^{(n/2)-2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) / 2\pi^{n/2}. \quad (12)$$

以 $y = x$ 代入(11)中的 x 即得(8).

比较 § 1(15), 可见

$$c_n = 2/(n-2)|S_1|. \quad (13)$$

设 $f(x)$ 为定义在 R^n 上的函数. 令

$$\left. \begin{aligned} B &= \{f: \text{有界, } R^n \text{ 可测}\}; \\ C &= \{f: f \in B, f \text{ 连续}\}; \\ C_0 &= \{f: f \in C \text{ 而且 } f(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

又令 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, 对 $f \in B$, 定义变换 T_t

$$T_t f(x) = \int_{R^n} f(y) p(t, x, y) dy, \quad (t > 0). \quad (15)$$

显然

$$\|T_t f\| \leq \|f\|, \quad \|T_t\| \leq 1. \quad (16)$$

引理 2. (i) $T_t B \subset C$; (ii) $T_t C_0 \subset C_0$.

证. 对 $f \in B$ 有

$$\begin{aligned} |T_t f(x) - T_t f(x_0)| &\leq \|f\| \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{R^n} |e^{-|x-y|^2/2t} \\ &\quad - e^{-|x_0-y|^2/2t}| dy. \end{aligned}$$

由勒贝格定理, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 右方趋于 0. 此得证 (i).

对 $f \in C_0$ 及 $N > 0$, 有

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &\leq \int_{|y| > N} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) |f(y)| dy \\ &\quad + \|f\| \int_{|y| < N} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy. \end{aligned}$$

由于 $f(\infty) = 0$, 对 $\varepsilon > 0$, 当 N 充分大时, 右方第一积分小于 $\varepsilon/2$; 固定此 N , 当 $|x|$ 充分大时, 第二积分 $< \varepsilon/2$, 此得证 $T_t f(\infty) = 0$. 联合 (i) 即得证 (ii).

引理 3. 设 f 均匀连续, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\| = 0. \quad (17)$$

证. 对 $\varepsilon > 0$, 由假设, 可选 $\delta > 0$, 使对一切 y , 有

$$\sup_{x: |x| < \delta} |f(x+y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \|T_t f - f\| &\leq \sup_y \left(\int_{|x| < \delta/2} + \int_{|x| \geq \delta/2} \right) \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) |f(x+y) - f(y)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\| \int_{|x| \geq \delta/2} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/2t} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\| \int_{|z| \geq \delta/2\sqrt{t}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|z|^2/2} dz. \end{aligned}$$

当 t 充分小时, 第二积分小于 $\varepsilon/2$.

注 1. 如 $f \in C_0$, 则 f 均匀连续, 故 (17) 对 $f \in C_0$ 成立.

由 (17) 的启发, 补定义 $T_0 f = f$, $T_0 = I$ (恒等算子).

上引理讨论了 $t \rightarrow 0$ 的情况; 至于 $t \rightarrow \infty$, 则有

引理 4. 如 $f \in C_0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T_t f\| = 0$.

证. 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 使 $x \in B_r \equiv (x: |x| \leq r)$ 时, $|f(x)| < \varepsilon/2$. 于是

$$\begin{aligned} \|T_t f\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \sup_y \int_{B_r} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) f(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_y \|f\| \int_{t^{-1/2}(B_r-y)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) dz \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f\| \int_{t^{-1/2}B_r} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) dz, \quad (18) \end{aligned}$$

其中

$$a(B_r - y) = (a(x - y): x \in B_r).$$

因而 $B_r - y$ 是以 $-y$ 为中心、 r 为半径的球. 当 t 充分大

时, (18)中最后一项 $< \varepsilon/2$ 。

为讨论对一般 t 的连续性, 先证 T_t 的半群性。

引理 5. $T_{s+t} = T_s T_t$ ($s \geq 0, t \geq 0, T_0 = I$)。

证。

$$\begin{aligned} T_s T_t f(x) &= (2\pi s)^{-n/2} (2\pi t)^{-n/2} \iint e^{-|y-x|^2/2s} e^{-|x-y|^2/2t} f(x) dx dy \\ &= (2\pi s)^{-n/2} (2\pi t)^{-n/2} \iint \exp \left[-\frac{|y-(xt+xs)/(s+t)|^2}{2st/(s+t)} \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{|x-z|^2}{2(s+t)} \right] f(x) dy dx, \end{aligned}$$

其中每次积分都在 R^n 上进行。利用

$$\begin{aligned} [2\pi st/(s+t)]^{-n/2} \int \exp \left[-\frac{|y-(xt+xs)/(s+t)|^2}{2st/(s+t)} \right] dy \\ = 1 \end{aligned}$$

得知上式右端等于

$$[2\pi(s+t)]^{-n/2} \int \exp \left[-\frac{|x-z|^2}{2(s+t)} \right] f(x) dx = T_{s+t} f(x)。$$

由(16)及引理 5 知 $\{T_t, t \geq 0\}$ 构成作用于 B 上的线性算子压缩半群, (16)表压缩性。

引理 6. 如 f 均匀连续, 或 $f \in C_0$, 则 $T_t f(x)$ 对 $t \geq 0$ 均匀连续, 而且此连续性对 $x \in R^n$ 也是均匀的。

证。利用 T_t 的半群性、压缩性、引理 3 及注 1, 对 $h > 0$, 有

$$\begin{aligned} \|T_{t+h} f - T_t f\| &\leq \|T_t\| \cdot \|T_h f - f\| \leq \|T_h f - f\| \rightarrow 0, \\ &\quad (h \rightarrow 0); \end{aligned}$$

对 $h = -k < 0$, 有

$$\begin{aligned} \|T_{t+h} f - T_t f\| &\leq \|T_{t-k}\| \cdot \|T_k f - f\| \leq \|T_k f - f\| \rightarrow 0, \\ &\quad (h \rightarrow 0)。 \end{aligned}$$

按范 $\|\cdot\|$ 的收敛称为强收敛,记为 slim . 令

$$D_A = \left\{ f: f \in B, \text{ 存在 } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_h f - f}{h} = g \in B \right\}. \quad (19)$$

简记

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_h f - f}{h} = g \text{ 为 } Af = g.$$

称 A 为半群 $\{T_t, t \geq 0\}$ 或过程 X 的强无穷小算子, 称 D_A 为 A 的定义域.

下定理把布朗运动与拉普拉斯方程联系起来.

定理 2. 设 f 有界、二次连续可微, 又二阶偏导数有界且在 R^n 上均匀连续, 则 $f \in D_A$, 又

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \left(= \frac{1}{2} \Delta f(x) \right), \quad (20)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

证.

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int \exp \left[-\frac{|y-x|^2}{2t} \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-z^2/2} f(x + z\sqrt{t}) dz, \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\int = \int_{R^n}$. 令 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, 利用泰勒展式,

得

$$\begin{aligned} f(x + z\sqrt{t}) &= f(x) + \sqrt{t} \sum_{i=1}^n z_i f_i(x) \\ &\quad + \frac{t}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j f_{ij}(x) + \frac{t}{2} \sum_{i,j=1}^n [f_{ij}(\tilde{x}) \\ &\quad - f_{ij}(x)] z_i z_j. \end{aligned}$$

\tilde{x} 之坐标分别在 x 与 $x + z\sqrt{t}$ 的坐标之间, 以此代入(21), 得

$$T_t f(x) = f(x) + \frac{t}{2} \Delta f(x) + (2\pi)^{-n/2} \frac{t}{2} J(t, x), \quad (22)$$

其中

$$J(t, x) = \int e^{-z^2/2} \sum_{i,j=1}^n [f_{ij}(\tilde{x}) - f_{ij}(x)] z_i z_j dz.$$

令

$$F(x, z, t) = \max_{i,j} |f_{ij}(\tilde{x}) - f_{ij}(x)|$$

则对任意 $s > 0$, 有

$$\begin{aligned} |J(t, x)| &\leq \int e^{-z^2/2} \sum_{i,j=1}^n F(x, z, t) \frac{z_i^2 + z_j^2}{2} dz \\ &= n \int F(x, z, t) e^{-z^2/2} z^2 dz \\ &\leq n \int_{|z| < s} F(x, z, t) z^2 e^{-z^2/2} dz \\ &\quad + 2 \max_{i,j} \|f_{ij}\| n \int_{|z| > s} z^2 e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

由于 f_{ij} 的均匀连续性, 当 $t \downarrow 0$ 时, 第一项对 x 均匀地趋于 0. 故

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sup_x |J(t, x)| \leq 2 \max_{i,j} \|f_{ij}\| n \int_{|z| > s} z^2 e^{-z^2/2} dz.$$

由 § 1 引理 1, 当 $s \rightarrow \infty$ 时, 右方趋于 0, 故

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_x |J(t, x)| = 0.$$

由此及(22)得

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left\| \frac{T_t f - f}{t} - \frac{1}{2} \Delta f \right\| = 0.$$

注 2. 如 f 有界、二次连续可微, 则在任一紧集 $K (\subset R^n)$ 上, 均匀地有

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2} \Delta f(x). \quad (23)$$

实际上, 只要在上述证明中, 改 \sup_x 为 $\sup_{x \in K}$, 改“均匀”为在“ K 上均匀”, 改 $\|f\|$ 为 $\sup_{x \in K} |f(x)|$.

(三) 作为马氏过程的布朗运动. 考虑 (Q, \mathcal{F}, P) 上的布朗运动 $\{x_t(\omega), t \geq 0\}$. 不妨设 $x_0(\omega) \equiv 0$, 因而 $P(x_0(\omega) = 0) = 1$ (否则考虑 $\{x_t(\omega) - x_0(\omega), t \geq 0\}$, 它显然也是一布朗运动). 自然地称它为自 0 出发的布朗运动. 令 \mathcal{N}_t^i 为 $\{x_s(\omega), s \leq u \leq t\}$ 所产生的 σ 代数, 记 $\mathcal{N}_t = \mathcal{N}_t^0$, $\mathcal{N}^t = \mathcal{N}_\infty^t = \bigcup_{s \geq t} \mathcal{N}_s^t$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\infty^0$.

今对每 $a \in R^n$, 定义 $x_t^a(\omega) \equiv x_t(\omega) + a$. 由平移不变性, 知 $X^a \equiv \{x_t^a(\omega), t \geq 0\}$ 也是布朗运动. 自然地称它为自 a 出发的布朗运动. 注意由 $\{x_s^a(\omega), s \leq u \leq t\}$ 产生的 σ 代数也是 \mathcal{N}_t^i . 以 P_a 表 X^a 在 \mathcal{N} 上产生的概率测度, 它是满足下列条件的唯一测度: 对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $A_i \in \mathcal{B}^n$,

$$\begin{aligned} P_a(x^a(t_1) \in A_1, \cdots, x^a(t_m) \in A_m) \\ &= P(x(t_1) + a \in A_1, \cdots, x(t_m) + a \in A_m) \\ &= \int_{A_1} p(t_1, a, da_1) \int_{A_2} p(t_2 - t_1, a_1, da_2) \\ &\quad \cdots \int_{A_m} p(t_m - t_{m-1}, a_{m-1}, da_m), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $p(t, x, y)$ 由 (6) 定义. 在 \mathcal{N} 上, P 重合于 P_0 .

全体 $X^a(a \in R^n)$ 构成一马氏过程 $X = (x_t, \mathcal{N}_t, P_x)$, 这里的 x_t 应理解为全体 $x_t^a(a \in R^n)$, 它的转移密度为(6)中的 $p(t, x, y)$. 此马氏过程是由各点出发的布朗运动所共同组成, 因而可以利用马氏过程的理论. 以后所说的布朗运动, 无特别声明时, 均指此马氏过程. X 有下列性质:

1) 由引理 2 (i) 及轨道 x_t 对 t 的连续性, 知 X 是强马氏过程(文献[8]中定理 3.10).

2) 由引理 2 及文献[8]中定理 3.3, 过程 $X' = (x_t, \mathcal{N}_{t+}, P_x)$ 也是强马氏过程; 这里 $\mathcal{N}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{N}_s$. 又由[8]引理

3.3, 关于过程 X' , τ 为马氏时间的充要条件是: $\forall t \geq 0$,

$$(\tau < t) \in \mathcal{N}_{t+}.$$

3) 以 $\bar{\mathcal{N}}_t$ 表 \mathcal{N}_t 关于一切 $P_x (x \in R^n)$ 的完全化 σ 代数, \bar{P}_x 表 P_x 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 上之延拓, 则 $(x_t, \bar{\mathcal{N}}_{t+}, \bar{P}_x)$ 也是强马氏过程(文献[8]中定理 3.12).

§ 3. 首中时与首中点

(一) 首中时. 近代马氏过程论中的一个极重要的概念是首中某集 B 的时间. 对 n 维布朗运动 X 及集 $B \in \mathscr{B}^n$, 定义

$$h_B(\omega) = \begin{cases} \inf(t > 0, x_t(\omega) \in B), & \text{如右集非空;} \\ \infty, & \text{反之.} \end{cases} \quad (1)$$

称 $h_B (= h_B(\omega))$ 为 B 的首中时 (hitting time), 亦称为 $B^c (= R^n - B)$ 的首出时.

h_B 是马氏时间. 当 B 为开集时, 此结论极易证明: 实际上, 由轨道的连续性, 对 $t > 0$,

$$(h_B < t) = \bigcup_{\text{有 } r < t} (x_r \in B) \in \mathcal{N}_{t+}.$$

但对一般的 $B \in \mathscr{B}^n$, 则证明很困难而需用到 Choquet 的容许论(见文献[1]或[23]中附录).

在 $(h_B < \infty)$ 上考虑 $x(h_B)(=x(h_B, \omega))$, 它是随机变量, 取值于 R^n . 称它为集 B 的首中点. 显然, 如 B 是紧集, 则 $x(h_B) \in B$. 对一般的 B , 只有 $x(h_B) \in \bar{B}$ (B 的闭包).

引理 1 (0-1 律). 设 $A \in \mathcal{N}_{0+}$, 则

$$P_a(A) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证. 以 θ_t 表 X 的推移算子(见文献[8]), 因 $\theta_0 A = A$, 故由马氏性得

$$\begin{aligned} P_a(A) &= P_a(A \theta_0 A) = \int_A P_a(\theta_0 A | \mathcal{N}_{0+}) P_a(d\omega) \\ &= \int_A P_{x(\omega)}(A) P_a(d\omega) = [P_a(A)]^2 \end{aligned}$$

既然 $(h_B = 0) \in \overline{\bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{N}_\epsilon} = \mathcal{N}_{0+}$, 故由引理 1

$$P_a(h_B = 0) = 0 \text{ 或 } 1.$$

在后一情况, 称 a 为 B 的规则点; 否则称为非规则点. 直观地说, 从 a 出发, 作布朗运动的粒子能立刻击中 B 的点是 B 的规则点; 因此, 容易想象, B 在规则点附近不能太稀疏. 以 \mathring{B} 表 B 的内点所成的集. 由 X 的轨道的连续性, 如 $a \in \mathring{B}$, 则 a 是 B 的规则点; 如 $a \in (\bar{B})^c$ (c 表补集运算), 则自 a 出发, 必须在开集 $(\bar{B})^c$ 中停留一段时间而不能立即击中 B , 故 a 是 B 的非规则点. 以 B^r 表 B 的规则点的集, 由上述得

$$\mathring{B} \subset B^r \subset \bar{B}. \quad (2)$$

剩下只是边界 $\partial B (= B \cap \bar{B}^c)$ 上的点, 可以是规则点, 也可能非规则.

如 B 有内点, 由(2)知 B^r 非空. 可见对一般的集, 规则点应很多而非规则点则较少. 的确, 以后会证明 (§ 3, 定理 4),

B 中非规则点集 $B \cap (B^c)^c$ 的 L 测度为 0.

一个极端情况是 $B^c = \mathbb{Q}$ (空集), 因之 B 必无内点而呈稀疏态. 称 B 为疏集, 如存在 $D \in \mathcal{B}^n$, $B \subset D$, $D^c = \mathbb{Q}$, 由此定义

$$P_a(h_B = 0) \leq P_a(h_D = 0) = 0,$$

故自任一点 a 出发都不能立即击中疏集 B .

更极端的情况是自任一点出发都永不能击中的集. 称 B 为极集, 如 $P_a(h_B < \infty) = 0$.

显然, 极集是疏集. 以后将证明: 紧集是极集的充要条件是它为疏集 (§ 11, 定理 2); B 为极集的充要条件是它的容量 $\tilde{C}(B) = 0$ (§ 11, 定理 4).

(二) 首次通过公式. 此公式很重要. 设 τ 为马氏时间, 对 τ 用强马氏性, 得

$$\begin{aligned} P_a(x_t \in A) &= P_a(x_t \in A, \tau > t) \\ &+ \int_0^t \int P_b(x_{t-s} \in A) P_a(\tau \in ds, x_s \in db). \end{aligned} \quad (3)$$

因而对可积函数 $f(x)$, 有

$$\begin{aligned} E_a f(x_t) &= E_a(f(x_t), \tau > t) \\ &+ \int_0^t \int E_b f(x_{t-s}) P_a(\tau \in ds, x_s \in db), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\int = \int_{R^n}$, E_a 表对应于 P_a 的数学期望.

特别, 如取 $\tau = h_B$, 则因 $x(h_B) \in \bar{B}$, 故此时 (4) 中的积分 \int_{R^n} 可换为 $\int_{\bar{B}}$.

(三) 球面的首中时. 对一般的 B , 求出 h_B 的分布是相当困难的问题, 对首中点 $x(h_B)$ 也如此. 只是对少数的 B , 问题可以解决, 例如球面 $S_r = (x: |x| = r)$, $r > 0$. 简记 S_r 的首中时为 h_r .

定理 1. i) $P_a(h_r < \infty) = 1, (|a| \leq r)$;

ii) $E_0 h_r = r^2/n$;

iii) $E_a h_r$ 当 $|a| \leq r$ 时有界.

证. 由(4)

$$E_0 f(x_t) = E_0(f(x_t), h_r > t) + \int_0^t \int_{S_r} E_b f(x_{t-s}) P_0(h_r \in ds, x(h_r) \in db). \quad (5)$$

特别, 取 $f(x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. 由于 $x(u)$ 的每个分量 $x_i(u)$

在开始分布 P_{b_i} 下有 $\mathcal{N}(b_i, \sqrt{u})$ 一维正态分布, 故

$$E_{b_i} [x_i(u)]^2 = b_i^2 + u,$$

从而

$$E_b f(x_u) = \sum_{i=1}^n E_{b_i} [x_i(u)]^2 = |b|^2 + nu. \quad (6)$$

以(6)代入(5)得

$$nt = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + \int_0^t \int_{S_r} [|b|^2 + n(t-s)] P_0(h_r \in ds, x(h_r) \in db).$$

当 $b \in S_r$ 时, $|b| = r$ 是一常数, 故

$$nt = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + r^2 P_0(h_r \leq t) + nE_0(t - h_r, h_r \leq t),$$

亦即

$$\begin{aligned} nt P_0(h_r > t) + nE_0(h_r, h_r \leq t) \\ = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + r^2 P_0(h_r \leq t), \end{aligned} \quad (7)$$

当 $h_r > t$ 时, $|x_t|^2 < r^2$, 故

$$nt P_0(h_r > t) + nE_0(h_r, h_r \leq t) \leq 2r^2. \quad (8)$$

令 $t \rightarrow \infty$, 可见 $P_0(h_r > t) \rightarrow 0$, 或

$$P_0(h_r < \infty) = 1. \quad (9)$$

同理, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 得 $E_0 h_r < \infty$. 由于

$$\begin{aligned} E_0 h_r &= \int_0^t s dF(s) + \int_t^\infty s dF(s) \\ &\geq \int_0^t s dF(s) + t P_0(h_r > t), \end{aligned}$$

其中 $F(s) = P_0(h_r \leq s)$, 从而 $t P_0(h_r > t) \rightarrow 0$, ($t \rightarrow \infty$). 由此及 (9), 于 (7) 中令 $t \rightarrow \infty$, 即得 $n E_0(h_r) = r^2$, 此即 ii).

今考虑一般的 a , $|a| \leq r$. 以 $S_u(a)$ 表以 a 为中心、 u 为半径的球面. 选 u 充分大, 使一切 $S_u(a)$ ($|a| < r$) 都包含 S_r . 以 $h_u(a)$ 表 $S_u(a)$ 的首中时, $h_u = h_u(0)$, 则

$$P_a(h_r < h_u(a)) = 1.$$

由布朗运动的平移不变性,

$$P_a(h_r < \infty) \geq P_a(h_u(a) < \infty) = P_0(h_u < \infty) = 1.$$

最后,

$$E_a h_r \leq E_a[h_u(a)] = E_0 h_u = \frac{u^2}{n}.$$

以 e_B 表 B 的首出时, 即 $e_B = h_{B^c}$.

系 1. 设 $B \in \mathscr{B}^*$ 有界, 则 $E_x(e_B)$ 对 $x \in B$ 有界.

证. 只要取充分大的球包含 B , 并仿上证即可. *

注 1. 如 B 无界, 则问题复杂. 例如, 设 $n = 2$, $B_\alpha = \{x: x \in R^2, x \neq 0, 0 < \theta < \alpha\}$, θ 是 x 与向量 $(1, 0)$ 的交角. 可以证明: $E_a(e_{B_\alpha}) < \infty$, (一切 $a \in B_\alpha$), 等价于 $\alpha < \frac{\pi}{4}$. 对

一般的连通开集 B , 则可证明: $E_a(e_B^{p/2}) < \infty$ 对某 $a \in B$, 因之对一切 $a \in B$ 成立, 等价于存在调和于 B 中的函数 u , 使 $|x|^p \leq u(x)$, $x \in B$. 见文献 [2; 2.1].

注 2. 至于 h_r 的分布, 在文献[4]中证明了:

$$P_0(h_r > a) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni} \exp\left(-\frac{q_{ni}^2}{2r^2} a\right), \quad (a \geq 0), \quad (10)$$

其中 q_{ni} 是 Bessel 函数 $J_\nu(z)$ ($\nu = \frac{n}{2} - 1$) 的正零点, 又

$$\xi_{ni} = q_{ni}^{\nu-1} / 2^{\nu-1} \Gamma(\nu+1) J_{\nu+1}(q_{ni}), \quad (11)$$

那里还发现了一个有趣的事实: 以 $T_r^{(n+2)}$ 表 $n+2$ 维布朗运动在 $n+2$ 维球 $B_r = \left\{x: \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 \leq r^2\right\}$ 内的停留时间,

以 $h_r^{(n)}$ 表 n 维布朗运动首中球面 $S_r = \left\{x: \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2\right\}$ 的时间, 则关于 P_0 , $T_r^{(n+2)}$ 与 $h_r^{(n)}$ 同分布, 故 $P_0(T_r^{(n+2)} > a)$ 也等于 (10) 之右方值. 这些结果为 [10] 所发展, 例如, 求出了 h_r 的拉氏变换:

$$E_b e^{-\lambda h_r} = \left(\frac{r}{|b|}\right)^\nu I_\nu(\sqrt{2\lambda}|b|) / I_\nu(\sqrt{2\lambda}r), \quad (n \geq 2), \quad (12)$$

其中 I_ν 为 modified Bessel 函数, $\nu = \frac{n}{2} - 1$, $0 < |b| < r$;

而

$$E_0 e^{-\lambda h_r} = (r\sqrt{2\lambda})^\nu / [2^\nu I_\nu(r\sqrt{2\lambda}) \Gamma(\nu+1)], \quad (n \geq 2). \quad (13)$$

在上二式中, $\lambda > 0$.

(四) 球面的首中点. 今讨论首中点 $x(h_r)$ 的分布. 由定理 1 i), $P_0(x(h_r) \in S_r) = 1$, $|a| \leq r$. 下面证明: 关于 P_0 , $x(h_r)$ 有球面上的均匀分布 U_r , U_r 由 § 1 (16) 定义.

设 H 为 R^n 上正交变换, 它把点 x 变为点 Hx , 把集 A 变为集 $HA = (Hx; x \in A)$. \mathscr{B}^n 上的测度 U 称为关于 H 不变,

如 $U(A) = U(HA)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

引理 2. 设 U 为 S_r 上之概率测度, 它对任一保留原点不动的正交变换(或旋转) H 不变, 则 $U = U_r$.

证. 1° 设 φ 为 U 之特征函数, ξ 是以 U 为分布之随机向量, 即 $P(\xi \in A) = U(A)$. 由

$$P(H^{-1}\xi \in A) = P(\xi \in HA) = U(HA) = U(A)$$

知 $H^{-1}\xi$ 与 ξ 同分布. 于是

$$\varphi(x) = E e^{i(x, \xi)} = E e^{i(x, H^{-1}\xi)} = E e^{i(Hx, \xi)} = \varphi(Hx),$$

即 $\varphi(x)$ 在上述变换下也不变, 故必为 $|x|$ 的函数; 从而存在一元函数 $\phi(s)$, 使

$$\varphi(x) = \phi(|x|), \quad (x \in R^n). \quad (14)$$

2° 显见 U_r 对上述变换不变, 故由上知: 对 U_r 的特征函数 φ_r , 存在一元函数 ϕ_r , 使

$$\varphi_r(x) = \phi_r(|x|), \quad (x \in R^n). \quad (15)$$

而 U_r 的特征函数 $\varphi_r(x)$ 满足

$$\begin{aligned} \varphi_r(x) &= \int_{S_r} e^{i(x, y)} U_r(dy) = \int_{S_1} e^{i(rx, y)} U_1(dy) \\ &= \phi_r(r|x|), \quad (x \in R^n). \end{aligned} \quad (16)$$

3° 对任 $r > 0$, 有

$$\begin{aligned} \phi(r) &\stackrel{(14)}{=} \int_{S_r} \varphi(x) U_r(dx) = \int_{S_r} U_r(dx) \int_{S_r} e^{i(x, y)} U(dy) \\ &= \int_{S_r} U(dy) \left(\int_{S_r} e^{i(x, y)} U_r(dx) \right) = \int_{S_r} \varphi_r(y) U(dy) \\ &\stackrel{(15)}{=} \int_{S_r} \phi_r(r|y|) U(dy) = \phi_r(sr). \end{aligned} \quad (17)$$

因之

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \phi(|x|) \stackrel{(17)}{=} \phi_r(r|x|) \stackrel{(15)}{=} \varphi_r(x), \\ &\quad (x \in R^n). \end{aligned}$$

定理 2. 对可测集 $A \subset S_r$, 有

$$P_0(x(h_r) \in A) = U_r(A). \quad (18)$$

证. 以 H 表引理 2 中的变换, 由 § 2 引理 1, HX 也是布朗运动. 以 h'_r 表 HX 对 S_r 的首中时, 则因正交变换保持距离不变, 故 $h_r = h'_r$. 于是

$$\begin{aligned} P_0(x(h_r) \in A) &= P_0(Hx(h'_r) \in A) \\ &= P_0(Hx(h_r) \in A) = P_0(x(h_r) \in H^{-1}A). \end{aligned}$$

这说明 $x(h_r)$ 的分布关于 H^{-1} 不变. 但 H^{-1} 可以是上述任一正交变换, 故由引理 2 即得证 (18)。

注 3. § 5 会证明, 如从球内任一点 x 出发, 则

$$\begin{aligned} P_x(x(h_r) \in A) &= \int_A r^{n-2} ||x|^2 - r^2| |y - x|^{-n} U_r(dy), \\ &(|x| < r). \end{aligned} \quad (19)$$

特别, 当 $x = 0$, 此式化为 (18).

注 4. 能具体求出首中点分布的, 尚有:

1° 超平面 $\Pi = (x: (a, x) = c)$, 其中向量 $a \neq 0$, c 为常数. 以 μ 表 Π 上的面积测度, 则

$$P_x(x(h_n) \in dy) = \frac{\Gamma(n/2)d(x, \Pi)}{\pi^{n/2}|y - x|^n} \mu(dy), \quad (n \geq 2),$$

其中 $d(x, \Pi)$ 为 x 到 Π 的距离.

2° 当 $n = 2$ 时, 自 $(x, 0)$ 出发, ($x \neq 0$), Y 坐标轴的首中点有柯西分布密度为 $|x|/\pi(x^2 + y^2)$, ($y \in R^1$).

(五) 一般性质. 称函数 f 在点 x 下连续, 如 $\lim_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$.

定理 3. 设 $B \in \mathscr{B}^n$, 则 $P_x(h_B \leq t)$ 对固定的 x 是 $t > 0$ 的连续函数; 对固定的 $t > 0$ 是 x 的下连续函数.

证. 设对某 $t > 0$ 有 $P_x(h_B = t) > 0$, 则对任意 $d, 0 < a < t$, 有

$$\int p(d, x, y) P_y(h_B = t + d) dy \geq P_x(h_B = t) > 0. \quad (20)$$

于是存在 $r > 0$ 使

$$\begin{aligned} \int_{|y| < r} p(d, x, y) P_y(h_B = t + d) dy \\ \geq \frac{1}{2} P_x(h_B = t) > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由此知对任意 $d, 0 \leq d < t$, 有

$$\int_{|y| < r} P_y(h_B = t + d) dy > 0. \quad (22)$$

否则 $P_y(h_B = t + d) = 0$ ($L - a.e. y$) 而 (21) 左方应为 0.

考虑非降函数 $F(t)$

$$F(t) = \int_{|y| < r} P_y(h_B \leq t) dy.$$

因 $F(\infty) \leq \int_{|y| < r} dy < \infty$, 故 $F(t)$ 至多只有可列多个不连续点; 但 (22) 却表示其不连续点非可列, 此矛盾证实了定理的前一结论.

固定 $t > 0$, 注意

$$\begin{aligned} \int p(d, x, y) P_y(h_B \leq t + d) dy \\ = P_x(\text{对某 } s \in (d, t), x_s \in B) \end{aligned}$$

由 § 2 引理 2 (i), 左方、因而右方对 x 连续; 但 $d \downarrow 0$ 时, 右方 $P_x(h_B \leq t) = P_x(h_B \leq t)$, 故后者对 x 下连续.

定理 4. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, 则 B' 是 G_δ 型集, 而且 $B \cap (B')^c$ 的 L 测度为 0.

证. 由定理 3 后一结论知, 对固定的 $t > 0$ 及 a , $(x; P_x(h_B \leq t) > a)$ 是开集; 故由下式立知 B' 是 G_δ 集:

$$B^c = \{x: P_x(h_B \neq 0) = 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x: P_x\left(h_B \leq \frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

任取相对紧集¹⁾ $A \subset B \cap (B^c)^c$. 先证

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_A P_x(x_t \in A) dx = 0, \quad (23)$$

实际上, 我们有

$$P_x(x_t \in A) \leq P_x(h_A \leq t) \leq P_x(h_{B^c} \leq t).$$

当 $x \in A$ 时, $x \in (B^c)^c$, 故

$$0 \leq \overline{\lim}_{t \downarrow 0} P_x(x_t \in A) \leq \lim_{t \downarrow 0} P_x(h_{B^c} \leq t) = 0.$$

由 Fatou 引理得证(23). 考虑有界连续函数 $f(x)$:

$$f(x) = \int \chi_A(z+x) \chi_A(z) dz = \int_A \chi_A(z+x) dz,$$

χ_A 为 A 的示性函数.

$$\begin{aligned} E_0 f(x_t) &= E_0 \int_A \chi_A(z+x_t) dz = \int_A P_0(x_t+z \in A) dz \\ &= \int_A P_x(x_t \in A) dz. \end{aligned}$$

由(23), 得 A 的测度为

$$\begin{aligned} |A| &= f(0) = \lim_{t \downarrow 0} E_0 f(x_t) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \int_A P_x(x_t \in A) dx = 0. \end{aligned}$$

注 5. 令 $f_B(x, t) = P_x(h_B \leq t)$, 紧集 $B \subset R^3$. 可以证明: $f_B(x, t)$ 是热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f \quad (t > 0, x \in B^c)$$

1) 称集 $A \in \mathcal{B}^n$ 为相对紧集, 如 \bar{A} 紧.

在下列条件下的唯一解:

开始条件 $f(x, 0) = 0, \quad (x \in B^c),$

边值条件 $\lim_{x \rightarrow y} f(x, t) = 1, \quad (t > 0, y \in B \cap B^c).$

因此, 可视 $f_B(x, t)$ 为于时 t 在点 $x \in B^c$ 上的温度. 在时 t 自 B 流入周围介质 B^c 中的总能量为

$$E_B(t) = \int_{B^c} P_x(h_B \leq t) dx = \int_{B^c} f_B(x, t) dx.$$

可以证明[19]: 当 $n \neq 3, t \rightarrow \infty$ 时

$$E_B(t) \sim tC(B) + 4(2\pi)^{-1/2}[C(B)]^2t^{1/2} + o(t^{1/2}),$$

而且若 B 为球, 则 $o(t^{1/2}) = 0, (t > 0)$. 这里 $C(B)$ 是 B 的容度(见 § 9).

§ 4. 调和函数

(一) 定义. 设 $A \subset R^n$ 为任一开集. 称函数 $h(x)$ 在 A 中调和, 如它在 A 中连续, $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$ 存在, 而且满足拉普拉斯方程

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = 0. \quad (1)$$

例 1. 设 a 为任一定点, c_1 与 c_2 为二常数. 令

$$h(x) = c_1 + c_2/|x - a|^{n-2}, \quad (n \neq 2), \quad (2)$$

$$h(x) = c_1 + c_2 \log \frac{1}{|x - a|}, \quad (n = 2). \quad (3)$$

由直接计算知, 它们在 $R^n - \{a\}$ 中调和. 事实上, $h(x)$ 除在 a 点外连续. 设 $a = (a_1, \dots, a_n)$, 则

$$|x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}.$$

若 $n > 2$, 则

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = c_2 \frac{(2-n)(x_i - a_i)}{|x - a|^n},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = c_2 \left\{ \frac{n(n-2)(x_i - a_i)^2}{|x - a|^{n+2}} - \frac{n-2}{|x - a|^n} \right\}.$$

由此知 h 满足(1). 对 $n = 1, 2$, 证明类似.

注意, 调和函数定义中的连续性必不可少.

下列 ДЫНКИН 定理, 很是有用. 证明见文献[8]第5章 § 1 (或文献[22] § 5.1 定理 1) 及本文 § 2 定理 2.

定理 1. 设 A 为相对紧开集. 如函数 u 在 \bar{A} 连续, Δu 在 A 中存在、连续而且有界, 则对一切 $x \in \bar{A}$ 有

$$E_x[u(x_c)] = u(x) = \frac{1}{2} E_x \left[\int_0^c \Delta u(x_s) ds \right], \quad (4)$$

其中 $c = c_A$ 为 A 的首出时.

由(4)知, 如 u 在 \bar{A} 连续且在 A 内调和, 则

$$u(x) = E_x[u(x_c)], \quad (x \in \bar{A}). \quad (5)$$

下面讨论调和性的等价条件.

称函数 $f(x)$ 在开集 A 中为局部可积的, 如它在 A 中每一紧集上为 L 可积. 称 $u(x)$ 在 A 中具有球面平均性, 如对每点 $a \in A$ 和每个球 $B_r(a) = \{x: |x - a| \leq r\} \subset A$, ($r > 0$), 有

$$u(a) = \int_{S_r(a)} u(x) U_r(dx), \quad (6)$$

U_r 为球面 $S_r(a)$ 上的均匀分布. 由 § 3 定理 2, 可改写(6)为

$$u(a) = E_a[u(x_{e_r})]. \quad (7)$$

e_r 为 $S_r(a)$ 的首中时, 也是开球 $B_r(a) = \{x: |x - a| < r\}$ 的首出时. 这是球面平均性的概率表示.

定理 2. 函数 $h(x)$ 在开集 A 中调和的充要条件是它在 A 中局部可积而且有球面平均性.

证. 设 $h(x)$ 调和. 由连续性得局部可积性. 任取 $a \in A$, $B_r(a) \subset A$, 在(5)中取 u 为 h , c 为 c_r , 即得球面平均性.

反之, 设 h 局部可积, 而且满足(6). 暂¹⁾增设 $h \in C^2(A)$, 则必有 $\Delta h = 0$. 否则, 如说在某点 $a \in A$, 有 $\Delta h(a) > 0$ (< 0 时讨论类似); 由于 $h \in C^2(A)$, 必存在 $B_r(a) \subset A$, 使

$$P_s(\Delta h(x_s)) > 0, s \leq c_r = 1.$$

由(4)

$$E_a[h(x_{c_r})] - h(a) = \frac{1}{2} E_a \left[\int_0^{c_r} \Delta h(x_s) ds \right] > 0,$$

这与 h 满足(6)矛盾.

现在证明: $h \in C^2(A)$ 的增设是多余的. 甚至可以证明更强的结果: 如 h 在 A 中局部可积而且有球面平均性, 则 $h \in C^\infty(A)$.

为证此, 首先注意: 如 $g(x)$ ($x \in R^n$) 为 L 可积, 则有等式(见 § 1, 系 1)

$$\int g(x) dx = |S_1| \int_0^\infty \left(\int_{S_r} g(x) U_r(dx) \right) r^{n-1} dr, \quad (8)$$

其中 $|S_1|$ 为单位球的面积 (§ 1, (15)). 任取 $x_0 \in A$, 选 $\delta > 0$, 使球 $B_{2\delta}(x_0) \subset A$. 以 ψ 表 $[0, \infty)$ 上的非负、无穷次可微的函数, 它在 $[\delta^2, \infty)$ 上恒为 0, 但在 $[0, \delta^2)$ 上不恒为 0. 则由(8)有

$$\begin{aligned} \int_A \psi(|y-x|^2) h(y) dy &= \int_{B_\delta(x_0)} \psi(|y|^2) h(x+y) dy \\ &= |S_1| \int_0^\delta \left[\int_{S_r} \psi(|y|^2) h(x+y) U_r(dy) \right] r^{n-1} dr \\ &= |S_1| \int_0^\delta \psi(r^2) \left[\int_{S_r} h(x+y) U_r(dy) \right] r^{n-1} dr \end{aligned}$$

1) 说 $h \in C^m(A)$, 如 h 在 A 中有 $K(\leq m)$ 级连续偏导数.

$$\begin{aligned}
&= |S_1| \int_0^b \phi(r^2) \left(\int_{S_r(x)} h(y) U_r(dy) \right) r^{n-1} dr \\
&= |S_1| h(x) \int_0^b \phi(r^2) r^{n-1} dr.
\end{aligned}$$

但此式左方作为 x 的函数在 $\hat{B}_b(x_0)$ 中无穷次可微; 故右方中的 $h(x)$ 也如此。

对局部可积函数 $f(x)$, 以 $S^*f(a)$ 表它对球面 $S_r(a)$ 关于均匀分布的平均值:

$$S^*f(a) = \int_{S_r(a)} f(x) U_r(dx) = \frac{1}{|S_r(a)|} \int_{S_r(a)} f(x) L_{n-1}(dx). \quad (9)$$

以 $B^*f(a)$ 表它对球体 $B_r(a)$ 关于勒贝格测度 L 的平均值:

$$B^*f(a) = \frac{1}{|B_r(a)|} \int_{B_r(a)} f(x) L(dx). \quad (10)$$

$|B_r(a)|$ 表 $B_r(a)$ 的体积, 我们有

$$\begin{aligned}
B^*f(a) &= \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r \int_{S_u(a)} f(x) L_{n-1}(dx) du \\
&= \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)| S^*f(a) du.
\end{aligned} \quad (11)$$

今设 h 调和, 则 $h(a) = S^*h(a)$. 以 h 代入(11)中的 f , 得

$$B^*h(a) = \frac{h(a)}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)| du = h(a). \quad (12)$$

这表示调和函数也有球体平均性。

(二) 性质. 调和性的约束随所在区域之扩大而加强, 极而言之, 则有

定理 3. 在 R^n 中调和而且有下界(或上界)的函数 $h(x)$ 是一常数.

证. 因调和函数之负仍调和, 故只需考虑有下界情况, 而

且不妨设下界为 0.) 任取二点 x, y , 令 $a = |x - y|$. 对 $\varepsilon > 0$, 有 $B_\varepsilon(y) \subset B_{a+\varepsilon}(x)$, 故

$$\int_{B_\varepsilon(y)} h(z) L(dz) \leq \int_{B_{a+\varepsilon}(x)} h(z) L(dz),$$

亦即

$$|B_\varepsilon(y)| B^\varepsilon h(y) \leq |B_{a+\varepsilon}(x)| B^{a+\varepsilon} h(x).$$

利用(12)得

$$|B_\varepsilon(y)| h(y) \leq |B_{a+\varepsilon}(x)| h(x).$$

于是由 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|B_\varepsilon(y)|}{|B_{a+\varepsilon}(x)|} = 1$ 立得 $h(y) \leq h(x)$. 由 x 与 y 的

对称性即得 $h(x) = h(y)$. #

定理 4 (极大[或极小]原理). 设 h 在有界开集 A 中调和, 在 A 中连续, 则对任意 $a \in A$ 有

$$\inf_{x \in \partial A} h(x) \leq h(a) \leq \sup_{x \in \partial A} h(x). \quad (13)$$

证. 以 e 表 A 的首出时. 由布朗运动轨道的连续性, x_e 属于 A 的边界 ∂A . 由(4)

$$h(a) = E_a[h(x_e)] = \int_{\partial A} h(x) P_a(x_e \in dx), \quad (a \in A),$$

由此立得(13). #

调和函数有许多有趣的性质, 我们只叙述上述的一些, 因为它们以后要用到, 而且与概率论关系密切.

(三) 布朗运动轨道的性质.

a. 设 $e \equiv e(r, R)$ 为球层 $A = \{x: 0 < r < |x| < R\}$ 的首出时, 则对 $a \in A$ 有

$$P_a(|x_e| = r) = \begin{cases} (R^{2-n} - |a|^{2-n}) / (R^{2-n} - r^{2-n}), & (n \neq 2); \\ (\log R - \log |a|) / (\log R - \log r), & (n = 2). \end{cases} \quad (14)$$

实际上, 如 $n \neq 2$, 取 $h(x) = |x|^{2-n}$. 由例 1 知它在 A 中调

和. 又由 §3 定理 1, $P_a(e < \infty) = 1$, ($a \in A$). 从而

$$P_a(|x_e| = R) + P_a(|x_e| = r) = 1.$$

以此 h 的表达式代入 $h(a) = E_a[h(x_e)]$, 得

$$|a|^{2-n} = R^{2-n}(1 - P_a(|x_e| = r)) + r^{2-n}P_a(|x_e| = r).$$

由此立得(14)中前一结论. 同理, 对 $n=2$, 取 $h(x) = \log |x|$, 可得后一结论.

b. 令 e_r 为球面 $S_r(0) = \{x: |x| = r\}$ 的首中时, 则对 $|a| > r$, 有

$$P_a(e_r < \infty) = \begin{cases} (r/|a|)^{n-2}, & n \geq 3, \\ 1, & n \leq 2. \end{cases} \quad (15)$$

实际上, $e_r = \lim_{R \rightarrow \infty} e(r, R)$, 故

$$P_a(e_r < \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} P_a(|x_e| = r).$$

由此及(14)即得(15).

c. 一、二维布朗运动具有常返性: 设 a, b 为任二点, h_b 为 b 的邻域 V_b 的首中时, 则

$$P_a(h_b < \infty) = 1 \quad (16)$$

实际上, 由(15)第二式知此结论对 $b=0$ 成立. 由类似的证明知它对任意 b 也成立. 对一维布朗运动, (16)还可加强, 即其中的 h_b 可理解为单点集 $\{b\}$ 的首中时. 实际上, 设 $a < b$, 任取 $c > b$. 则由(16), 自 a 出发, 首中 c 的任一不含 b 的邻域的概率为 1; 由轨道的连续性, 及 $a < b < c$, 中间经过 b 之概率也为 1.

d. 二维布朗运动轨道处处稠密. 令

$$D_t = \{\omega: \{x_s(\omega), s \geq t\} \text{ 在 } R^2 \text{ 中稠密}\}.$$

则对任意 a , $P_a(D_t) = 1$, ($t \geq 0$).

实际上, 以 $h_b^{(r)}$ 表圆 $(x: |x-b| \leq r)$ 的首中时, 则由(16)

$$P_a(D_0) = P_a\left(\bigcap_b \bigcap_r (h_b^{(r)} < \infty)\right) = 1,$$

其中之交对一切二维有理点 b 及有理数 $r > 0$ 进行. 其次

$$P_a(D_t) = P_a(\theta_t D_0) = E_a P_{x(t)}(D_0) = 1.$$

e. 由于对任意 $t > 0$, $P_a(D_t) = 1$; 故

$$P_a(\overline{\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t|} = \infty) = 1; \quad (17)$$

$$P_a(\underline{\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t|} = 0) = 1.$$

f. 当 $n \geq 2$ 时, 任意单点集 $\{a\}$ 是极集. 为此, 只要在 (14) 中先令 $r \rightarrow 0$ 再令 $R \rightarrow \infty$, 即得 $P_a(e_0 < \infty) = 0$, 一切 $a \neq 0$, 其中 e_0 为 $\{0\}$ 的首中时. 其次, 由 $P_0(x_t = 0) = 0$, ($t > 0$), 得 $P_{x(t)}(e_0 < \infty) = 0$, (P_0 -a. e.), 故

$$P_0(\theta_t e_0 < \infty) = E_0 P_{x(t)}(e_0 < \infty) = 0.$$

令 $t \downarrow 0$, 即得 $P_0(e_0 < \infty) = 0$. 于是得证

$$P_a(e_0 < \infty) = 0, \quad \text{一切 } a, \quad (18)$$

亦即得证 $\{0\}$ 是极集. 类似可证任意单点集为极集.

然而由 c 中末所述, $n = 1$ 时, 单点集都常返; 故一维布朗运动无非空极集.

g. $n \geq 3$ 维布朗运动是暂留的, 即

$$P_a(\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t| = \infty) = 1, \quad \text{一切 } a \in \text{dom } S. \quad (19)$$

因而它不常返. 注意, 此式加强了 (17). 为证此, 令

$$T_m = \inf(t > 0, |x_t| \leq m), \quad \mu_m = \inf(t > 0, |x_t| \geq m^3).$$

由 § 3 定理 1, $P_a(\mu_m < \infty) = 1$, 一切 a , 一切正整数 m . 从而 $P_a(\theta_t \mu_m < \infty) = 1$, ($t \geq 0$). 故重新得证

$$P_a(\overline{\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t|} = \infty) = 1. \quad (20)$$

由强马氏性及 (15),

$$\begin{aligned} P_a(\theta_{u_m}(T_m) < \infty) &= E_a P_{x(u_m)}(T_m < \infty) \\ &= E_a \left[\left(\frac{m}{m^3} \right)^{n-2} \right] = m^{2(2-n)}, \end{aligned}$$

故对一切 a , 有

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} P_a(|x(t+u_m)| \leq m \text{ 对某 } t) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} P_a(\theta_{u_m}(T_m) < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{2(2-n)} < \infty. \end{aligned}$$

根据 Borel-Cantelli 引理, 上式首项中的事件以 P_a -概率 1 只出现有限多个; 此与(20)结合即得证(19).

§ 5. Dirichlet 问题

(一) 问题的提出与解决. 设 A 为开集, $A \subset R^n$, $n \geq 2$. 在 A 的边界 ∂A 上已给连续函数 f , 要求求出在 \bar{A} 连续、在 A 中调和的函数 h , 而且满足边值条件:

$$h(x) = f(x) \quad (x \in \partial A), \quad (1)$$

简称它为 D -问题, 是 Gauss 于 1840 年提出的; Gauss 以为他已用“Dirichlet 原理”解决了它, 但后来发现推理有错. 1909 年 Zaremba 及 1913 年 Lebesgue 都给出了甚至当 A 有界时也无解之例. 1924 年 Wiener 提出了广义的 D -问题, 后者恒有解. 但他未发现与布朗运动的联系; 这种联系是 Kakutani 于 1944、Doob 于 1954 年发现的.

D -问题是否有解, 依赖于边界 ∂A 上的点是否对 A^c 正则. 粗略地说, A^c 在边界点的邻近不能太小, 以使布朗粒子从边界点出发能立即击中 A^c , 问题才有解.

如 A 有界且有解, 则解必唯一; 对无界的 A , 则解可不唯一而有无穷多个.

D -问题在微分方程理论中已有很深入的研究,我们这里不追求问题的更广泛的提法,而把重点放在概率方法上.人们正是通过 D -问题最初发现布朗运动与位势间的关系的.

定理 1. 设 A 为有界开集, $A \subset R^n$, $n \geq 2$, 则 D -问题有解的充要条件是 ∂A 的每一点都是 A^c 的规则点; 此时解 $h(x)$ 唯一, 而且可表为

$$h(x) = E_x f(x_e) \quad (x \in A), \quad (2)$$

e 为 A 的首出时.

证. 1° 唯一: 设 h_1, h_2 都是解, 则 $h_1 - h_2$ 在 A 中调和, 在 ∂A 上为 0. 由 § 4 极大原理, 得

$$h_1(x) = h_2(x), \quad (x \in \bar{A})$$

2° 充分: 因 A 有界, 由 § 3 系 1, $P_x(e < \infty) = 1$. 由于 ∂A 的每一点 b 对 A^c 规则, 故 $P_b(e = 0) = 1$, 因此, 由 (2) 定义的 $h(x)$ 满足边值条件:

$$h(b) = E_b f(x_0) = f(b), \quad (b \in \partial A).$$

因 A 有界, f 在 ∂A 连续, 故有界. 由 (2) 定义的 $h(x)$ 有界可测, 故局部可积.

以 T 表球面 $S_r(x)$ 的首中时, $x \in A$, $B_r(x) \subset A$. 由强马氏性, (2) 中 h 满足

$$\begin{aligned} h(x) &= E_x f(x(T + \theta_T e)) = E_x E_{x(T)} f(x(e)) \\ &= E_x h(x(T)). \end{aligned} \quad (3)$$

故 h 在 A 中有球面平均性 (参看 § 4, (7)). 这连同局部可积性即知 $h(x)$ 在 A 中调和.

剩下要证 (2) 中的 $h(x)$ 在 $a \in \partial A$ 连续, 亦即要证

$$\lim_{x \rightarrow a} E_x f(x_e) = f(a) \quad (x \in A), \quad (4)$$

为此, 先证对任 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{x \rightarrow a} P_x(|x_e - a| \geq \varepsilon) = 0. \quad (5)$$

而利用 $|x_e - a| \leq |x_e - x| + |x - a|$, 可见为证(5), 又只要证

$$\lim_{x \rightarrow a} P_x(|x_e - x| \geq \varepsilon) = 0; \quad (6)$$

这是由于

$$(|x_e - a| \geq \varepsilon) \subset \left(|x_e - x| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|x - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P_x(|x_e - a| \geq \varepsilon) \leq \lim_{x \rightarrow a} P_x\left(|x_e - x| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

下证(6). 我们有

$$\begin{aligned} P_x(|x_e - x| \geq \varepsilon) &= P_x(|x_e - x| \geq \varepsilon, e \geq t) + P_x(|x_e - x| \geq \varepsilon, e < t) \\ &\leq P_x(e \geq t) + P_x\left(\sup_{0 \leq t \leq t} |x_e - x| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq P_x(e \geq t) + P_0\left(\sup_{0 \leq t \leq t} |x_t| \geq \varepsilon\right) \\ &= P_x(e \geq t) + P_0(T_\varepsilon \leq t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 T_ε 为开球 $\hat{B}_\varepsilon(0) = \{x: |x| < \varepsilon\}$ 的首出时. 因 0 是 $B_\varepsilon(0)$ 的内点, 故是 $R^n \setminus \hat{B}_\varepsilon(0)$ 的非规则点, 从而

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_0(T_\varepsilon \leq t) = P_0(T_\varepsilon = 0) = 0;$$

故对 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_0 > 0$, 当 $t \leq t_0$ 时,

$$P_0(T_\varepsilon \leq t) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (8)$$

固定如此的 $t = t_0$. 由 §3 定理 3, $P_x(e > t)$ 对 x 上连续; 又 a 对 A' 规则, 故

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} P_x(e \geq t_0) &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} P_x\left(e > \frac{t_0}{2}\right) \\ &\leq P_a\left(e > \frac{t_0}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

故存在 $\delta > 0$, 当 $x \in B_\delta(a) \cap \bar{A}$ 时,

$$P_x(e \geq t_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (9)$$

综合(7)–(9)知, 对任何 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, 当 $x \in B_\delta(a) \cap \bar{A}$ 时,

$$P_x(|x_c - x| \geq \varepsilon) < \varepsilon_1.$$

于是(6)以及(5)得证.

由(5)及 f 的连续性, 对 $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$, 存在 $r > 0$, 当 $x \in B_r(a) \cap \bar{A}$ 时, 有

$$P_x(|f(x_c) - f(a)| > \varepsilon_2) < \varepsilon_3.$$

令 $B = (\omega: |f(x_c) - f(a)| > \varepsilon_2)$; 得

$$\begin{aligned} |E_x f(x_c) - f(a)| &\leq E_x |f(x_c) - f(a)| \\ &= E_x (|f(x_c) - f(a)|; B) + E_x (|f(x_c) - f(a)|; B^c) \\ &\leq 2\|f\|\varepsilon_3 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

其中 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, 此得证(4).

3° 必要: 即要证: 如 D -问题对一切连续边值函数 f 有解, 则每 $a \in \partial A$ 对 A^c 规则. 取 $f \geq 0$ 为定义在 ∂A 上的连续函数, 而且只在一点 a 上, $f(a) = 0$. 由假设, 存在连续于 \bar{A} 、调和于 A 中的函数 $h(x)$, 它在 ∂A 上等于 f . 由 §4(5)

$$h(x) = E_x[h(x_c)] = E_x f(x_c) \quad (x \in \bar{A}),$$

故

$$E_a f(x_c) = h(a) = f(a) = 0.$$

由此及 $f \geq 0$, 得 $P_a(f(x_c) = 0) = 1$; 但 f 只在 a 点为 0, 故 $P_a(x_c = a) = 1$. 由于单点集 $\{a\}$ 为极集(见 §4, f), 则必有 $P_a(e = 0) = 1$, 即 $a \in (A^c)^*$.

注 1. Wiener 提出的广义 D -问题是: 设已给开集 A , 在 ∂A 上已给连续函数 f , 需要求出函数 h , 它在 A 中调和, 而且

对任意 $b \in \partial A \cap (A^c)^r$, 有

$$\lim_{A \ni x \rightarrow b} h(x) = f(b); \quad (10)$$

当 A 有界时, 仔细看上定理的证明 2°, 可见 (2) 中的 $h(x)$ 仍是此广义 D -问题的解. 但那里的唯一性证明 1° 不能通过, 因为此时极大原理不能用. 不过可以证明解仍是唯一的 (见文献 [18] 第 5 章 § 5).

注 2. 今考虑任意开集 (未必有界) A 及定义在 ∂A 上的有界连续函数 f , 如 $\partial A \subset (A^c)^r$, 则 D -问题有解为

$$h(x) = E_x[f(x_c), e < \infty] + cP_x(e = \infty), \quad (11)$$

c 为任意常数. 实际上, 仿定理 1 中的证明 2°, 可见 $E_x[f(x_c), e < \infty]$ 仍是 D -问题之一解. 特别, 取 $f \equiv 1$, 则 $P_x(e < \infty)$ 是边值为 1 之 D -问题之解; $P_x(e = \infty)$ 是边值为 0 之 D -问题之解. 因此, 对任意常数 c , (11) 是原 D -问题之解. 进一步还可证明: D -问题的任一解必呈 (11) 形 (见 [15; 17]).

注 3. 在 Zaremba 的反例中, $A = \bar{B}_1 \setminus \{0\}$ 是去掉原点的单位开球, 边值函数 f 是: $f(0) = 1, f(x) = 0, x \in S_1$ (单位球面). $\{0\}$ 是极集. 广义 D -问题有解为 $h(x) = E_x f(x_c) = 0, x \in A$. (注意 $h(0) \neq 1$). 但 D -问题无解. 关于 Lebesgue 的反例及其物理解释, 见文献 [12] § 7.12.

(2) 式开创了用概率方法解数学分析问题的先例. 关于一般的椭圆型方程等的概率解法可见 [8] 第 13 章及 [9]. 以某些方程的概率表示为理论基础的 Monte-Carlo 方法, 给出了这些方程的数值解.

定理 1 可如下推广: 设 A 为有界开集, $\partial A \subset (A^c)^r$, f 为 ∂A 上的连续函数, c 为 A 的首出时, 则

$$\varphi_\lambda(x) = E_x e^{-\lambda c} f(x_c), \quad (\lambda \geq 0) \quad (12)$$

在 A 中二次连续可微, 而且是微分方程

$$\lambda \Phi_\lambda(x) - \frac{1}{2} \Delta \Phi_\lambda(x) = 0 \quad (x \in A) \quad (13)$$

在边值条件

$$\lim_{A \ni x \rightarrow a} \Phi_\lambda(x) = f(a) \quad (a \in \partial A)$$

下的唯一解 (证见文献[5]卷 2, 第 4 章 § 4).

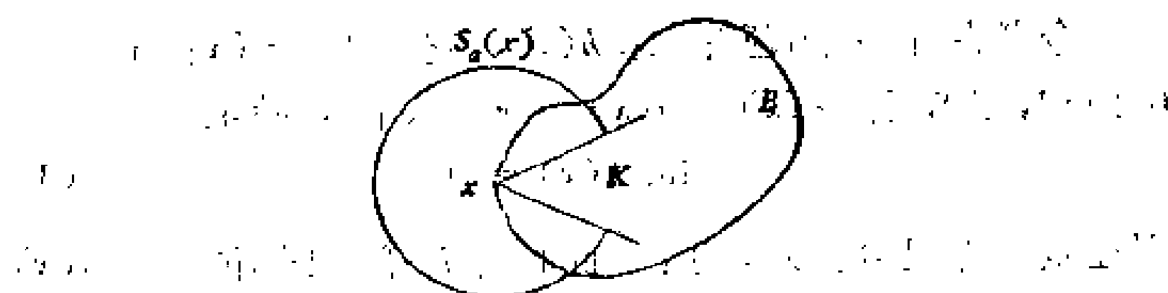
如 $\lambda = 0$, 则得定理 1; 如 $f = 1$, 则得 e 的分布的拉氏变换.

(二) 锥判别法. 由定理 1 可见点的规则性起着重要作用. 至于判断边界点是否规则, 有下列简单的、Poincaré 的锥判别法.

称 R^n 中集 K 为顶点在 $b \in R^n$ 的锥, 如存在单位向量 $u \in R^n$ 及常数 $\alpha > 0$, 使 $K = \{x; x \in R^n, |(x-b) \cdot u| \geq \alpha |x-b|\}$. 设 $B_a(b)$ 为以 b 为心、以 $a > 0$ 为半径的球, 称 $K \cap B_a(b)$ 为一锥顶.

定理 2. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $x \in \partial B$. 如存在以 x 为顶点的锥顶 $K \cap B_a(x) \subset B$, 则 $x \in B'$.

证. 以 h_a 表球面 $S_a(x)$ 的首中时. 由 § 3 定理 2



$$P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) = U_a(B \cap S_a(x)) \geq U_a(K \cap S_a(x)).$$

注意 $U_a(K \cap S_a(x)) = \beta > 0$ 与 $a > 0$ 无关. 由于

$$(x(h_a) \in B) \subset (h_B \ll h_a),$$

h_B 为 B 的首中时, 故

$$\begin{aligned} P_x(h_B \leq h_a) &\geq P_x(x(h_a) \in B) \\ &\geq P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) \geq \beta > 0. \end{aligned}$$

由 § 3 定理 1 (ii), $P_x(\lim_{a \rightarrow 0} h_a = 0) = 1$. 在上式中令 $a \rightarrow 0$, 得 $P_x(h_B = 0) \geq \beta > 0$. 根据 0-1 律, $P_x(h_B = 0) = 1$. 故 $x \in B^*$.

锥法虽只给出充分条件, 但简单好用. 至于充要条件则有 Wiener 判别法:

设 $B \in \mathcal{B}^n, (n \geq 3)$. $B_m = \{y: y \in B, \lambda^{m+1} < |y - x| \leq \lambda^m\}$, 其中常数 $0 < \lambda < 1$, 又 $x \in R^n$ 为定点, 则 $x \in B^*$ 的充要条件是 $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m(2-n)} C(B_m) = \infty$, $C(B_m)$ 表 B_m 的容量. (见文献[12]及[17]). $n = 2$ 时也有类似结果.

(三) 球的 D -问题. 设 $n \geq 3$, A 为开球 \dot{B}_r , $r > 0$. 一方面, 由微分方程知: D -问题的解由下列 Poisson 公式给出:

$$h(x) = \int_{S_r} r^{n-2} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - z|^n} f(z) U_r(dz), \quad |x| < r. \quad (14)$$

今考虑外 D -问题¹⁾: 求 $h(x)$, 它在 $B_r^c = \{x: |x| > r\}$ 中调和, 在 S_r 上, $h(x) = f(x)$, f 连续, 而且满足

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0. \quad (15)$$

则在微分方程中也证明了: 此时外 D -问题有唯一解 $h(x)$, 它仍然由(14)给出, 但其中 $|x| > r$.

现在转到概率方面. 以 e 表 S_r 的首中时, 由定理 1 知, 此 D -问题的解为

1) 参看文献[6]卷 2, 第 4 章, § 2.2 及[20]第 4 章 § 2, § 4.

$$h(x) = E_x f(x_e) = E_x(f(x_e), e < \infty), (|x| < r). \quad (16)$$

现在证明, 外 D -问题的解 $h(x)$ 也由(16)给出, 但 $|x| > r$. 实际上, 由注 2 已知(16)中 $h(x)$, $(|x| > r)$ 是一解; 其次, 由方程论知在附加条件(15)下, 外 D -问题的解唯一. 因此, 只需验证(16)中 $h(x)$, $(|x| > r)$ 满足(15). 为此, 先注意由 § 4(15)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P_x(e = \infty) = 1.$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |h(x)| &\leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} E_x(|f(x_e)|, e < \infty) \\ &\leq \|f\| \lim_{|x| \rightarrow \infty} P_x(e < \infty) = 0. \end{aligned}$$

综合上述两方面, 得

$$E_x f(x_e) = \int_{S_r} r^{n-2} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - z|^n} f(z) U_r(dz), (x \in S_r). \quad (17)$$

由此推知, 球面 S_r 的首中点有分布为

$$P_x(x_e \in A) = \int_A \frac{r^{n-2} |r^2 - |x|^2|}{|x - z|^n} U_r(dz), (x \in S_r), \quad (18)$$

其中 $A \subset S_r$ 为可测集. 特别, 取 $x = 0$, 此式化为 § 3, (18).

注 4. 我们已看到, (17)右方所定义的 x 的函数在 \hat{B}_r 中调和. 将此式再推进一步, 就得出 \hat{B}_r 中一切调和函数的 Poisson 积分表示. 这就是: $H(x)$ 为非负、在 \hat{B}_r 中调和的函数的充要条件是: 存在 S_r 上测度 μ , 使

$$H(x) = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}(r^2 - |x|^2)}{|x - z|^n} \mu(dz), (x \in \hat{B}_r), \quad (19)$$

其中测度 μ 有穷而且被 H 唯一决定(见文献[17]第 4 章, § 4).

至于在一般开集中调和、非负函数,也有积分表示;为此,需引进所谓 Martin 边界,它起着类似于(19)中 S_r 的作用.

§ 6. 禁止概率与常返集

(一) 三个重要函数. 设 $B \in \mathscr{B}^n$, \mathscr{B} 的首中时为 h_B , 首中点为 $x(h_B)$. 如 § 3 所述,有首次通过公式

$$\begin{aligned} P_x(x_t \in A) &= \int_0^t \int_B P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) P_x(x_{t-s} \in A) \\ &= P_x(h_B > t, x_t \in A). \end{aligned} \quad (1)$$

作为 A 的测度,左方有密度为

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \int_0^t \int_B P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) \\ p(t-s, z, y) &= q_B(t, x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

简写左方的二重积分为 $\Phi(y)$. 取 $y_n \rightarrow y$, 由 Fatou 引理,

$$\lim_{y_n \rightarrow y} \Phi(y_n) \geq \Phi(y).$$

故 $\Phi(y)$ 下连续,从而由(2)定义的 $q_B(t, x, y)$ 对 y 上连续. 既然(1)之右方非负, $q_B(t, x, y)$ 关于勒贝格测度几乎处处非负;由上连续性,它对一切 y 非负. 由(1)知,作为 A 的测度 $P_x(h_B > t, x_t \in A)$ 有密度,可取它为 $q_B(t, x, y)$. 由于 $P_x(h_B > t, x_t \in A)$ 是自 x 出发,在首中 B (或首出 B^c) 以前,于 t 时到达 A 之概率,故可称 $q_B(t, x, y)$ 为禁止密度.

今引入三个重要函数,它们分别是三个密度的拉氏变换. 对 $\lambda \geq 0$, 定义

$$g^1(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x) dt, \quad (3)$$

$$g_B^1(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t, x, y) dt. \quad (4)$$

$$H_B^1(x, dz) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz). \quad (5)$$

如 $\lambda = 0$, 简记 $g^0(x)$ 为 $g(x)$ 等等. 它们有性质:

$$1) \quad g^1(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} dt = \infty, \quad (n > 1)$$

$g^1(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续, 而且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g^1(x) = 0$.

$$2) \quad g^1(y-x) \geq g_B^1(x, y).$$

此因 $p(t, y-x) \geq q_B(t, x, y)$.

3) 测度 $H_B^1(x, dz)$ 集中在 \bar{B} 上, 而且

$$\begin{aligned} E_x e^{-\lambda h_B} f(x(h_B)) \\ &= \int_{\bar{B}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(z) P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz) \\ &= \int_{\bar{B}} H_B^1(x, dz) f(z). \end{aligned} \quad (6)$$

$$4) \quad E_x \int_0^{h_B} f(x_t) e^{-\lambda t} dt = \int g_B^1(x, y) f(y) dy. \quad (7)$$

实际上, 左方等于

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty f(x_t) e^{-\lambda t} \chi_{(h_B > t)} dt \\ &= \int \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B > t, x_t \in dy) f(y) dt \\ &= \int \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t, x, y) f(y) dy dt. \end{aligned}$$

$$5) \quad g^1(x) = g^1(-x). \quad (8)$$

$$6) \quad g_B^1(x, y) = g_B^1(y, x). \quad (9)$$

这是由于

$$q_B(t, x, y) = q_B(t, y, x). \quad (10)$$

后者的证明见文献[17]第二章定理 4.3 或[8]引理 14.1.

7) 如 $x \in B^c$ 或 $y \in B^c$, 则

$$g_B^1(x, y) = 0. \quad (11)$$

实际上,如 $x \in B'$, 则 $P_x(h_B = 0, x(h_B) = x) = 1$, 故由(2)得 $q_B(t, x, y) = 0$, 从而 $g_B^\lambda(x, y) = 0, (x \in B')$. 由对称性(9)即得 $g_B^\lambda(x, y) = 0 (y \in B')$.

今取首次通过公式的拉氏变换形式, 以便于应用. 以 $e^{-\lambda t}$ 乘(2)两边, 对 t 积分, 得

$$g^\lambda(y-x) = \int_B \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^t P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) \cdot p(t-s, y-z) \right] dt + g_B^\lambda(x, y).$$

利用拉氏变换的卷积公式, 得

$$g^\lambda(y-x) = \int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y-z) + g_B^\lambda(x, y). \quad (12)$$

由首尾二项关于 x, y 的对称性, 得

$$\int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y-z) = \int_B H_B^\lambda(y, dz) g^\lambda(x-z). \quad (13)$$

在(12)中令 $\lambda \rightarrow 0$, 利用(6)及单调收敛定理, 得势的基本公式:

$$g(y-x) = \int_B H_B(x, dz) g(y-z) + g_B(x, y), \\ (B \in \mathcal{B}^n, n \geq 3). \quad (14)$$

此式有概率意义: 自 x 出发, 在 y 点附近的平均停留时间, 等于首中 B 以前在 y 附近的平均停留时间, 加上首中 B 以后在 y 附近的平均停留时间. 后者由(14)中积分项给出.

(二) 常返集.

定理 1. 设 $f(x), x \in R^n$ 为有界可测函数, 满足 $f = T_t f$ (对某 $t > 0$), 则 f 恒等于一常数.

证. 先证一事实: 关于任一紧集中的 x, y , 均匀地有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_t f(x) - T_t f(y)) = 0.$$

实际上,

$$\begin{aligned} |T_t f(x) - T_t f(y)| &= \left| \int (p(t, x, z) - p(t, y, z)) f(z) dz \right| \\ &\leq \|f\| \int |p(t, x, z) - p(t, y, z)| dz \\ &= \|f\| \int |p(1, z) - p(1, z + (x - y)/\sqrt{t})| dz. \end{aligned}$$

由于 $p(1, z)$ 连续、可积, 故当 $t \rightarrow \infty$ 时, 右方关于紧集中的 x, y 均匀地趋于 0.

由 $T_t f = f$, 利用 (T_t) 的半群性得 $T_{mt} f = f$ 对一切正整数 m 成立, 于是由上述事实, 对任意 x, y ,

$$f(x) - f(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (T_{mt} f(x) - T_{mt} f(y)) = 0.$$

定理 2. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, ($n \geq 1$), 只有两种可能:

(i) 或者 $P_x(h_B < \infty) = 1$;

(ii) 或者对一切 x , 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = P_x(x_t \in B \text{ 对某 } t > t) \rightarrow 0.$$

证. 令 $\varphi(x) = P_x(h_B < \infty)$, $T_t \varphi$ 对 t 不增 (参看 (18)), 故

$$\varphi(x) \geq T_t \varphi(x) \downarrow r(x), \quad (t \rightarrow \infty). \quad (15)$$

在 $(T_t T_s \varphi(x) = T_{t+s} \varphi(x))$ 中, 令 $s \rightarrow \infty$, 由控制收敛定理及定理 1

$$T_t r(x) = r(x) = c \geq 0, \quad (c \text{ 为常数}). \quad (16)$$

在

$$\begin{aligned} P_x(t < h_B < \infty) &= \int q_B(t, x, y) \varphi(y) dy \\ &\geq c P_x(h_B > t) \end{aligned}$$

中, 令 $t \rightarrow \infty$, 得

$$0 = c P_x(h_B = \infty). \quad (17)$$

于是或者 $P_x(h_B = \infty) = 0$, 此即 (i); 或者 $c = 0$, 此时在

$$\begin{aligned}
T_t \varphi(x) &= E_x \varphi(x_t) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty) \\
&= P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = P_x(x_t \in B, \\
&\quad \text{对某 } s > t)
\end{aligned} \tag{18}$$

中, 令 $t \rightarrow \infty$, 并利用(15)(16)即得(ii)。

在情况(i), 称 B 为常返集; 在(ii)为暂留集(勿与 §4 中过程的常返性等混淆). 由 §4(15), 当 $n \geq 3$, 一切球, 从而一切有界可测集, 是暂留集. 由(18)知(i)等价于 $P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = 1, t \geq 0$. 又 $T_t \varphi \uparrow \varphi, t \downarrow 0$.

对一、二维布朗运动, 定理 2 可加强(比较 §4(三)c).

系 1. 对 $B \in \mathscr{B}^n (n = 1, 2)$, 只有两种可能:

(i) 或者 $P_x(h_B < \infty) = 1$;

(ii) 或者 $P_x(h_B < \infty) = 0$.

证. 由 §2 定理 1, $\int_0^\infty p(s, x, y) ds = \infty$. 故对任意可测、非负、不几乎处处(关于 L)为 0 的 $f(x)$, 有

$$\int_0^t T_s f(x) ds = \int \left(\int_0^t p(s, x, y) ds \right) f(y) dy \rightarrow \infty, \tag{19}$$

($t \rightarrow \infty$).

令 $\varphi(x) = P_x(h_B < \infty)$, 由 $T_t \varphi \leq \varphi \leq 1$, 对 $h > 0$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^t T_s(\varphi - T_h \varphi) ds = \int_0^t T_s \varphi ds \\
&\quad - \int_h^{t+h} T_s \varphi ds \leq 2h.
\end{aligned}$$

对照(19), 可见 $\varphi = T_h \varphi$ (L -a. e. x); 于是 $T_t \varphi = T_t(T_h \varphi)$. 再令 $t \downarrow 0$, 即得 $\varphi = T_h \varphi$ 对一切 x 成立. 从而得知 $\varphi(x)$ 等于(15)中的 $r(x)$; 由(16), $\varphi = c (\geq 0)$ 为常数, 并且(17)成立. 当 $c = 0$ 时即是情况(ii)。

系 1 也可改述为: 当 $n = 1$ 或 2 时, 除极集外, 一切非空

可测集都是常返集.

然而, 当 $n = 1$ 时, 在 § 4(三) 中已证明非空极集不存在, 故此时只有一种可能 (i), 即一切非空可测集皆常返.

至于判断一个集是否常返, 也有锥判别法. 直观地想, 如 $n \geq 3$, 集必须充分大才能常返.

定理 3. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $n \geq 3$, 如存在锥 K 及 $r > 0$, 使 $(x: x \in K, |x| \geq r) \subset B$, 则 B 常返.

证. 由平移不变性, 不妨设 K 的顶点在 O , 于是 $K = \{x: |x \cdot u| \geq \alpha |x|\}$, u 为某单位向量, $\alpha > 0$. 显然, 对任意常数 $c > 0$, $\sqrt{c} \cdot K = K$. 由尺度不变性

$$P_0(x(t) \in K) = P_0\left(\frac{x(ct)}{\sqrt{c}} \in K\right) = P_0(x(ct) \in K),$$

故 $P_0(x(t) \in K) = d > 0$, d 为常数. 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(|x(t)| \geq r) = 1$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(\theta_t(h_B < \infty)) &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(x(t) \in B) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(x(t) \in K, |x(t)| \geq r) = d > 0. \end{aligned}$$

由定理 2 知 B 常返.

注 1. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $n \geq 3$, $\lambda > 1$, 令 $B_m = \{x: x \in B, \lambda^m \leq |x| < \lambda^{m+1}\}$, 则 B 为常返的充要条件是

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m(n-2)} C(B_m) < \infty,$$

$C(B_m)$ 表 B_m 的容度. 证见 [17].

(三) 收敛引理. 下二引理很有用, 特别, 引理 2 可用来研究无界开集.

引理 1. 设 B 及 B_m 皆为闭集, 又 \mathring{B}_m 表 B_m 的内点集;

$$B_1 \supset \mathring{B}_1 \supset B_2 \supset \mathring{B}_2 \supset \cdots \supset B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathring{B}_m,$$

则对 $x \in B^c \cup B'$, 有

$$P_x(h_{B_m} \uparrow h_B) = 1, \quad (m \rightarrow \infty).$$

证. 显然 h_{B_m} 不降, $0 \leq h_{B_m} \uparrow h \leq h_B$. 如 $h = \infty$, 则引理成立. 如 $x \in B'$, 则 $P_x(h_B = 0) = 1$, 引理也成立. 故只要考虑 $h < \infty$, $x \in B^c$ 的情形. 由于 B 及 B_m 闭, 轨道连续,

$$B_m \ni x(h_{B_m}) \rightarrow x(h) \in \bigcap_m B_m = B.$$

故如 $h > 0$, 则必有 $h \geq h_B$. 但当 $x \in B^c$ 时, $P_x(h > 0) = 1$, 故 $P_x(h = h_B) = 1$.

注 2. 如 $x \in B^c \cup B'$, 即如 $x \in B \cap (B')^c$, 则 $P_x(h_{B_m} = 0) = 1$, $P_x(h_B > 0) = 1$, 故 $P_x(h_{B_m} \uparrow h_B) = 0$, 而引理 1 结论不成立.

引理 2. 设 G 为非空开集, 则存在一列上升开集 G_m , 其紧闭包含于 G , 使

$$1. G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset \dots, \bigcup_m G_m = G;$$

$$2. \partial G_m \text{ 的每一点对 } G_m^c \text{ 规则};$$

$$3. P_x(h_{\partial G_m} \uparrow h_{\partial G}) = 1, x \in G.$$

证. 取一列紧集 K_m , 使 $K_1 \subset K_2 \subset \dots, \bigcup_m K_m = \bar{G}$. 用

有限多个开球遮盖 K_1 , 并使这些开球之和 D 满足 $\bar{D} \subset G$. 有必要时改变某些球的半径. 用锥判别法 (§ 5 定理 2) 知, ∂D 的每一点对 D^c 规则. 取 $G_1 = D$, 于是 $\bar{G}_1 \subset G$ 而且 ∂G_1 的点 G_1^c 规则. 同样手续施之于 $\bar{G}_1 \cup K_2$ 可得 $G_2, \dots, \{G_m\}$ 满足 1 与 2, 故

1) 但如 $h = 0$, 由 $x(h) \in B$ 未必有 $h \geq h_B = \inf\{t > 0, x_t \in B\}$, 注意此中 $t > 0$, 而非 $t \geq 0$. 例如, 设 $x_0 = x$ 对 B 非规则, $x \in B$, 则 $P_x(h = 0) = 1$, 但 $P_x(h_B > 0) = 1$.

$$G_1^c \supset (G_1^c)^{\circ} \supset G_2^c \supset \cdots, \quad \bigcap_m G_m^c = G^c.$$

由引理 1, $P_x(h_{G_m^c} \uparrow h_{G^c}) = 1$ ($x \in G$). 但 $P_x(h_{\partial G} = h_{G^c}) = 1$ ($x \in G$); $P_x(h_{\partial G_m} = h_{G_m^c}) = 1$ ($x \in G_m$), 故由上式得 $P_x(h_{\partial G_m} \uparrow h_{\partial G}) = 1$ ($x \in G$).

§ 7. 测度的势与 Balayage 问题

(一) 唯一性. $n \geq 3$ 维布朗运动的势核 $g(x, y) = g(y - x)$ 取为

$$g(y - x) = c_n |x - y|^{2-n}, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (1)$$

对 \mathcal{B}^n 可测函数 f , 如下列积分存在, 定义 f 的牛顿势为 Gf :

$$Gf(x) = \int g(y - x) f(y) dy. \quad (2)$$

对 \mathcal{B}^n 上的测度 μ , 定义 μ 的牛顿势为 $G\mu$,

$$G\mu(x) = \int g(y - x) \mu(dy), \quad (3)$$

其中 $\int = \int_{R^n}$. 如 $f \geq 0$, 可视 (2) 为 (3) 的特殊情形, 故主要考虑 (3), 它把测度 μ 变为函数 $G\mu(x)$.

由 §1 引理 3, 如 $\mu(R^n) < \infty$, 则 $G\mu(x) < \infty$, (L-a. e.).

引理 1. 如 $G\mu(x) < \infty$, 则

$$G\mu(x) = T_t G\mu(x) = \int_0^t T_s \mu(x) ds. \quad (4)$$

证.

$$T_t G\mu(x) = \iint g(y - z) \mu(dy) p(t, z - x) dz$$

$$= \int \int \int_0^\infty p(s, y - z) ds \mu(dy) p(t, z - x) dz$$

$$= \int \int_0^\infty p(s + t, y - x) ds \mu(dy)$$

$$= \int_0^\infty p(s, y - x) ds \mu(dy);$$

$$\int_0^t T_s \mu(x) ds = \int_0^t \int p(s, y - x) \mu(dy) ds.$$

所以

$$T_t G \mu(x) + \int_0^t T_s \mu(x) ds = \int \int_0^\infty p(s, y - x) ds \mu(dy)$$

$$= \int g(y - x) \mu(dy) = G \mu(x).$$

定理 1. 设 μ 为有限测度, 则 $G\mu$ 唯一决定 μ .

证. 1° 设有二测度 μ 与 ν 使

$$G\mu = G\nu < \infty \quad (L\text{-a.e.}),$$

如在点 x 上此式成立, 则由引理 1

$$\int_0^t T_s \mu(x) ds = \int_0^t T_s \nu(x) ds. \quad (5)$$

2° 取任意非负、连续于 R^n 且有紧支集的函数 f , 利用 $p(s, x, y)$ 对 x, y 的对称性, 有

$$\int \left(\frac{1}{t} \int_0^t T_s f ds \right) d\mu = \int \left(\frac{1}{t} \int_0^t T_s f ds \right) d\nu$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} \int_0^t \int p(s, x, y) f(y) dy ds \right) \mu(dx)$$

$$= \int \frac{1}{t} \int_0^t T_s \mu(y) ds f(y) dy$$

$$= \int \frac{1}{t} \int_0^t T_s \nu(y) ds f(y) dy$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} \int_0^t T_s f ds \right) d\nu.$$

由 §2 引理 3, 对 $x \in R^*$ 均匀地有 $T_\epsilon f \rightarrow f (\epsilon \rightarrow 0)$, 利用 ϵ - δ 方法及测度有限, 易见 $\int f d\mu = \int f d\nu$. 由 f 的任意性, $\mu = \nu$.

(二) 极大值原理.

定理 2. 设 μ 为有限测度, 其支集为 B , 又 $N \subset B$, $\mu(N) = 0$. 如 $G\mu(x) \leq M < \infty$, 一切 $x \in N^* \cap B$, 则

$$\sup_{x \in R^n} G\mu(x) \leq M. \quad (6)$$

证. 1° 由 §6 (14)

$$g(y-x) = \int_B H_B(x, dz) g(y-z) + g_B(x, y). \quad (7)$$

对任意 $\epsilon > 0$, 令 $A = \{x: G\mu(x) \leq M + \epsilon\}$. 以 A 代入 (7) 中的 B , 双方对 $\mu(dy)$ 积分, 因 μ 有支集 B , 得

$$\begin{aligned} G\mu(x) &= \int_A H_A(x, dz) G\mu(z) + \int_B g_A(x, y) \mu(dy) \\ &= \int_A H_A(x, dz) G\mu(z) + \int_{B \cap N^c} g_A(x, y) \mu(dy). \end{aligned} \quad (8)$$

2° 下证 $g_A(x, y) = 0$, 一切 $y \in B \cap N^*$; 从而最后一积分化为 0. 由于 $B \cap N^c \subset A$, 由 §6, 7), 只要证 A 中点皆对 A 规则, 从而 $g_A(x, y) = 0$, ($y \in A$). 用反证法, 设 $a \in A$, $a \notin A'$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} P_a(x_t \in A) &\leq \lim_{t \rightarrow 0} P_a(h_A \leq t) \\ &= P_a(h_A = 0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

由引理 1

$$\begin{aligned} G\mu(a) &\geq T_t G\mu(a) \geq \int_A p(t, y-a) G\mu(y) dy \\ &\geq (M + \epsilon) P_a(x_t \in A). \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow 0$, 由 (9) 得 $G\mu(a) \geq M + \epsilon$, 此与 $a \in A$ 矛盾.

3° 于是由 (8) 及 2°

$$G\mu(x) = \int_{\bar{A}} H_A(x, dx) G\mu(x), \quad (x \in R^n). \quad (10)$$

如能证在 \bar{A} 上, $G\mu(x) \leq M + \varepsilon$, 则由上式立得(6). 下面会证明 $G\mu(x)$ 下连续, 故 $(x: G\mu(x) \leq M + \varepsilon)$ 闭. 既然它包含 A , 故也包含 \bar{A} .

4° 今证 $G\mu(x)$ 下连续. 由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} G\mu(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \int_0^\infty p(t, x, y) dt \mu(dy) \\ &\geq \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow a} p(t, x, y) dt \mu(dy) \\ &= \int_0^\infty p(t, a, y) dt \mu(dy) = G\mu(a)_\#, \end{aligned}$$

注 1. 极大值原理可以如下直观解释. 由于 μ 之支集为 B , 故

$$G\mu(x) = \int_B g(y-x) \mu(dy), \quad (x \in R^n). \quad (11)$$

$G\mu(x)$ 可视为自 x 出发, 在 B 中的关于 μ 加权平均的停留时间. 今如自 $x \in B^c$ 出发, 此时间自应从进入 B 时开始算起. 设由点 $b \in B$ 进入 B , 则

$$G\mu(x) \approx G\mu(b).$$

回忆 $g^1(x)$ 的定义 (§6, (3)), 令

$$G^1\mu(x) = \int g^1(y-x) \mu(dy). \quad (12)$$

定理 2'. 设 μ 为有限测度, 其支集为 B , 则

$$G^1\mu(x) \leq \sup_{y \in B} G^1\mu(y), \quad (x \in R^n). \quad (13)$$

证明与定理 2 之证明类似, 只要以 $e^{-\mu} T_i$ 代替那里的 T_i .

(二) Balayage 问题(简称 B -问题). 以 \mathcal{M} 表所有使势 $G\mu(x)$ 为局部可积的有限测度 μ 之集. 所谓 B -问题是: 设

已给集 $B \in \mathcal{B}^n$ 及 $\mu \in \mathcal{M}$, 试求 $\mu' \in \mathcal{M}$, 其支集含于 B' , 并且使

$$G\mu'(x) = G\mu(x), \quad (x \in B') \quad (14)$$

$$G\mu'(x) \leq G\mu(x), \quad (x \in R^n, n \geq 3). \quad (15)$$

下面试解决此问题. 以 $H_B(x, A) = P_x(x(h_B) \in A)$ 表 B 的首中点分布, 定义测度 μ'

$$\mu'(A) = \mu H_B(A) = \int H_B(x, A) \mu(dx). \quad (16)$$

定理 3. 设 B 为紧集, 则 μ' 是 B -问题的唯一解.

证. $H_B(x, \cdot)$ 集中在 $\bar{B} = B$ 上, 但 $B \cap (B')^c$ 为极集 (见 § 11 定理 3), 故 $H_B(x, \cdot)$, 因而 μ' 集中在 B' 上. 在 § 6 (13) 中令 $\lambda \downarrow 0$, 得

$$\int_{B'} H_B(x, dz) g(y - z) = \int_{B'} H_B(y, dz) g(x - z). \quad (17)$$

又

$$\begin{aligned} G\mu'(x) &= G\mu H_B(x) = \int_{B'} g(x - z) \mu H_B(dz) \\ &= \int_{B'} g(x - z) \left[\int H_B(y, dz) \mu(dy) \right] \\ &= \int \left[\int_{B'} g(x - z) H_B(y, dz) \right] \mu(dy) \\ &\stackrel{(17)}{=} \int \left[\int_{B'} g(y - z) H_B(x, dz) \right] \mu(dy) \\ &= \int_{B'} H_B(x, dz) G\mu(z) \\ &= H_B G\mu(x) \leq G\mu(x). \end{aligned} \quad (18)$$

最后不等式是由于 § 6 (14). 由 (18) 知 $\mu' \in \mathcal{M}$ 而且满足 (15). 如 $x \in B'$, 则 $H_B(x, \cdot)$ 集中在点 $\{x\}$ 上, 故由 (18) 的中间推演, 有

$$G\mu H_B(x) = \int_{B'} H_B(x, dz) G\mu(z) = G\mu(x),$$

此得证(14). 最后证解的唯一性. 设 ν 也是解, 则 ν 之支集含于 B' . 由 § 6(14), 并注意 $g_B(x, y) = 0, y \in B'$ (参看 § 6, 7)), 得

$$\begin{aligned} G\nu(x) &= \int_{B'} \int_{B'} H_B(x, dz) g(y-z) \nu(dy) \\ &= \int_{B'} H_B(x, dz) G\nu(z) \stackrel{(14)}{=} \int_{B'} H_B(x, dz) G\mu(z) \\ &\stackrel{(18)}{=} H_B G\mu(x) = G\mu H_B(x), \quad (x \in R^n). \end{aligned}$$

由唯一性, 即得 $\nu = \mu H_{B^c}$.

近年来提出了反 B -问题: 设 B 为紧集, 已给 ∂B 上之概率测度 ν , 试求概率测度 μ , 使

$$\mu H_{B^c} = \nu, \quad (19)$$

其中 $\mu H_{B^c}(\cdot) = P_\mu(x(e_B) \in \cdot)$, $e_B \equiv h_{B^c}$ 为首出 B (或首中 B^c) 的时间. 满足(19)的一切概率测度记为 $M(\nu)$. 在[14]中证明了: $\mu \in M(\nu)$ 等价于下列三条件中的任何一个:

1° $G\mu \geq G\nu$; 而且 $G\mu(x) = G\nu(x), x \in B^c$.

2° $\int h d\mu = \int h d\nu$ 对一切调和于 \bar{B} 连续于 B 的函数 h 成立.

3° $\int f d\mu \geq \int f d\nu$ 对一切上调和于 \bar{B} (定义见 § 13) 连续于 B 的函数 f 成立.

§ 8. 平衡测度

(一) 定义. 设 F_m 与 F 为 \mathscr{B}^n 上的测度, 如果

$$\sup_{A \in \mathscr{B}^n} |F_m(A) - F(A)| \rightarrow 0, \quad (m \rightarrow \infty),$$

则说 F_m 强收敛到 F , 因而强收敛关于 A 是均匀的.

设 $n \geq 3$, B 为相对紧集. 取 $r > 0$ 充分大, 使 $B \subset \dot{B}_r$. 又 S_r 为球面 $(x: |x| = r)$. 对球外的点 x , $|x| > r$, 由强马氏性有

$$H_B(x, A) = \int_{S_r} H_{S_r}(x, d\xi) H_B(\xi, A), \quad (1)$$

其中 $H_D(x, \cdot)$ 为自 x 出发, 集 D 的首中点分布. 由(1)

$$\frac{H_B(x, A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} H_B(\xi, A), \quad (2)$$

引理 1. 在强收敛下, 有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} = \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi), \quad (3)$$

其中 U_r 为 S_r 上均匀分布, 常数 c_n 由 § 2(9) 定义.

证. 由 § 5(18)

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_A \left| \int_{S_r} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} - \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) \right| \\ & \leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_A \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{||x|^2 - r^2| |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi) \\ & \leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{||x|^2 - r^2| |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi) = 0, \end{aligned}$$

这里可在积分号下取极限, 因为当 $|x| \rightarrow \infty$ 时被积函数有界.

由(1)及引理 1; 对任意 $A \in \mathcal{B}^A$, 有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{H_B(x, A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, A). \quad (4)$$

这样便证明了

定理 1. 设 B 为相对紧集, 则测度

$$\mu_B(dy) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{H_B(x, dy)}{g(x)} \quad (5)$$

在强收敛下存在,而且对任一球面 $S_r, \hat{B}_r \supset \bar{B}$, 有

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} \frac{r^{n-1}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, dy). \quad (6)$$

称 μ_B 为 B 的平衡测度. 由(6)及轨道的连续性, 知 μ_B 集中在 B 的外边界上, 此外, μ_B 在任何极集 N 上无质量, 此因

$$H_B(x, N) \leq P_x(h_N < \infty) = 0,$$

故 $\mu_B(N) = 0$.

称 μ_B 的全质量 $\mu_B(\bar{B})$ 为 B 的容度, 记为 $C(B)$.

平衡测度有下列概率意义. 由(5)得

$$\mu_B(A) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(x(h_B) \in A, h_B < \infty)}{g(x)},$$

$$C(B) = \mu_B(\bar{B}) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(h_B < \infty)}{g(x)}.$$

故对 $A \in \mathcal{B}^n$ 有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P_x(x(h_B) \in A | h_B < \infty) = \frac{\mu_B(A)}{C(B)}. \quad (7)$$

因此, 规范化后的平衡测度, 可理解为自无穷远出发, B 的首中点的条件分布.

平衡测度 μ_B 的势 $G\mu_B$ 称为平衡势.

(二) 平衡势的概率意义.

定理 2. 设 B 为相对紧集, 则

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty), \quad x \in R^n. \quad (8)$$

注 1. 如 $x \in B'$, 则上式右方, 因而左方等于 1, 可见 $G\mu_B$ 相当于物理中的平衡势 (参看 § 1, (二)). 这也许就是为何称 μ_B 为 B 的平衡测度的原因.

定理 2 之证. 1° 由 § 6(14)

$$\frac{g(y-x)}{g(y)} = \int_B \frac{H_B(x, dz) g(y-z)}{g(y)} + \frac{g_B(x, y)}{g(y)}. \quad (9)$$

当 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $g(y-x)/g(y)$ 在紧集上均匀趋于 1, 故

$$1 = P_x(h_B < \infty) + \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{g_B(x, y)}{g(y)},$$

即在紧集上均匀地有

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{g_B(x, y)}{g(y)} = P_x(h_B = \infty). \quad (10)$$

利用对称性

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g_B(x, y)}{g(x)} = P_y(h_B = \infty). \quad (11)$$

设 f 为任意非负有界可测函数, 有紧支集 C , 则由 §1 引理 2

$$Gf(x) = \int_C g(y-x)f(y)dy$$

是有界函数. 由(11)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int \frac{g_B(x, y)}{g(x)} f(y) dy = \int P_y(h_B = \infty) f(y) dy. \quad (12)$$

2° 由(5)

$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}} \mu_B(dz) Gf(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}} \frac{H_B(x, dz) Gf(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \iint_{\bar{B}} \frac{H_B(x, dz) g(y-x) f(y) dy}{g(x)} \\ &\stackrel{(9)}{=} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\{ \iint \left[\frac{g(y-x)}{g(x)} - \frac{g_B(x, y)}{g(x)} \right] f(y) dy \right\} \\ &\stackrel{(12)}{=} \int [1 - P_y(h_B = \infty)] f(y) dy \\ &= \int P_y(h_B < \infty) f(y) dy. \end{aligned} \quad (13)$$

但另一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\bar{B}} \mu_B(dz) Gf(z) &= \int \left[\int_{\bar{B}} g(y-z) \mu_B(dz) \right] f(y) dy \\ &= \int G\mu_B(y) f(y) dy.\end{aligned}$$

综合此二方面

$$\int G\mu_B(y) f(y) dy = \int P_y(h_B < \infty) f(y) dy.$$

由 f 的任意性

$$G\mu_B(y) = P_y(h_B < \infty). \quad (L\text{-a.e.}) \quad (14)$$

3° 下证(14)对一切 $y \in R^n$ 成立. 将(14)双方乘以 $p(t, x, y)$ 后对 $y \in R^n$ 积分, 得

$$T_t G\mu_B(x) = T_t P_x(h_B < \infty).$$

由 § 7 引理 1, 左方等于

$$G\mu_B(x) = \int_0^t T_s \mu_B(x) ds \uparrow G\mu_B(x), \quad (t \downarrow 0, \text{一切 } x).$$

右方为

$$\begin{aligned}T_t P_x(h_B < \infty) &= T_t P_x(\text{对某 } s > 0, x_s \in B) \\ &= P_x(\text{对某 } s > t, x_s \in B) \uparrow P_x(h_B < \infty), \\ &\quad (t \downarrow 0, \text{一切 } x).\end{aligned}$$

因此

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty), \quad (x \in R^n)_\#$$

系 1. 相对紧集 B 为极集的充要条件是 $C(B) = 0$.

证. 如容度 $C(B) = \mu_B(\bar{B}) = 0$, 由(8)知 $P_x(h_B < \infty) \equiv 0$, 故 B 为极集. 反之, 若 B 为极集, 由(8), $G\mu_B(x) \equiv 0$; 据 § 7 唯一性定理, $C(B) = 0_\#$

例 1. 考虑球面 S_r , 由(5)(3), S_r 的平衡测度为

$$\mu_{S_r}(dy) = \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(dy) = 2\pi^{n/2} r^{n-2} U_r(dy) / \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

$$C(S_r) = 2\pi^{n/2} r^{n-2} / \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n-2}{2r} |S_r|,$$

$$(n \geq 3).$$

故 $C(S_r)$ 比面积 $|S_r|$ 低一维. 又由(8)及 § 4(15),

$$G\mu_{S_r}(x) = P_x(h_{S_r} < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{如 } |x| \leq r; \\ (r/|x|)^{n-2}, & \text{如 } |x| > r. \end{cases}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P_x(x(h_{S_r}) \in A | h_{S_r} < \infty) = U_r(A), \text{ (参看(7)).}$$

例 2. 考虑球 B_r 及球层 $B_{a,r} = (x: a \leq |x| \leq r)$. 由于它们的外边界为 S_r , 或者由于

$$P_x(h_{B_r} < \infty) = P_x(h_{B_{a,r}} < \infty) = P_x(h_{S_r} < \infty),$$

由(5)知 $B_r, B_{a,r}$ 与 S_r 有相同的平衡测度、容度及平衡势.

(三) 平衡测度的另一刻画. 对 $B \in \mathcal{B}^n$, 以 $\mathcal{M}(B)$ 表如下测度之集:

$$\mathcal{M}(B) = (\mu: \text{有穷、非0、有紧支集含于 } B, G\mu \leq 1). \quad (15)$$

定理 3. 设 B 为紧集, 则

$$P_x(h_B < \infty) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(B)} G\mu(x). \quad (16)$$

证. 1° 取一系列紧集 $\{B_m\}$, 使

$$B \subset \mathring{B}_m; B_1 \supset \mathring{B}_1 \supset B_2 \supset \mathring{B}_2 \supset \cdots;$$

$$\bigcap_m B_m = \bigcap_m \mathring{B}_m = B.$$

由 § 6 引理 1, 对 $x \in B^c \cup B^r$, 有 $P_x(h_{B_m} \uparrow h_B) = 1$. 试证

$$P_x(h_{B_m} < \infty) \downarrow P_x(h_B < \infty) \quad (L\text{-a. e.}). \quad (17)$$

实际上, 取 f 为有紧支集的连续函数, 对 $x \in B^c \cup B^r$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} H_{B_m} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathring{B}_m} H_{B_m}(x, dy) f(y) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} E_x f(x(h_{B_m})) = \lim_{m \rightarrow \infty} E_x [f(x(h_{B_m}))], \end{aligned}$$

$$h_{B_m} < \infty, h_B < \infty] + \lim_{m \rightarrow \infty} E_x[f(x(h_{B_m}), \\ h_{B_m} < \infty, h_B = \infty)].$$

由于轨道及 f 的连续性, 右方第一极限等于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_x[f(x(h_{B_m}), h_B < \infty] \\ = E_x[f(x(h_B), h_B < \infty] - H_B f(x).$$

因为 $f(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 故第二极限等于

$$E_x[f(x(h_B)), h_B = \infty] = 0.$$

故得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_{B_m} f(x) = H_B f(x). \quad (18)$$

特别, 取 f 连续, 有紧支集, 在 B_1 上等于 1, 即得(17)对一切 $x \in B^c \cup B^c$ 成立. 再由 §3 定理 4, (17)对 L -a. e. x 成立.

2° 取 $\mu \in \mathcal{M}(B)$. 由 §6(14)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz) G\mu(z) + \int g_{B_m}(x, y) \mu(dy). \quad (19)$$

后一积分

$$\int g_{B_m}(x, y) \mu(dy) = \left(\int_B + \int_{B^c} \right) g_{B_m}(x, y) \mu(dy); \quad (20)$$

因 $B \subset \bar{B}_m$, B 中的点对 B_m 规则, 故 $g_{B_m}(x, y) = 0, (y \in B)$. 又因 μ 之支集为 B , 故(20)右方二积分皆为 0. 由(19)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz) G\mu(z) \leq \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz) \\ = H_{B_m}(x, B_m) = P_x(h_{B_m} < \infty).$$

由此及(17)

$$G\mu(x) \leq P_x(h_B < \infty), \quad (L\text{-a. e. } x), \quad (21)$$

$$T_t G\mu(x) \leq T_t P_x(h_B < \infty).$$

令 $t \downarrow 0$, 即知(21)对一切 $x \in R^n$ 成立. 由此及定理 2 即得

证(16)_#

注 2. 在势论中已知(见文献 [25]): 如 B 是紧集, 则存在唯一测度 γ_B , 其支集为 B , 而且

$$G\gamma_B = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(B)} G\mu \quad (22)$$

通常称 γ_B 为容量测度. 由定理 2, 3, 立得

$$G\mu_B = G\gamma_B. \quad (23)$$

再由 § 7 唯一性定理, 有 $\mu_B = \gamma_B$. 因此, 对紧集 B , 平衡测度即是容量测度.

系 2. 设 B 紧, 则对任意 $\mu \in \mathcal{M}(B)$, 有

$$\mu(R^n) \leq C(B). \quad (24)$$

证. 由(16)(8)

$$\int_B \frac{g(y-x)}{g(x)} \mu(dy) \leq \int_B \frac{g(y-x)}{g(x)} \mu_B(dy).$$

由于在紧集上, 均匀地有 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(y-x)}{g(x)} = 1$, 故在上式中令

$|x| \rightarrow \infty$, 即得

$$\mu(R^n) = \mu(\bar{B}) \leq \mu_B(\bar{B}) = C(B)_{\#}$$

系 3. 对开集 B , (16)式也成立.

证. 取一系列紧集 $\{K_m\}$, 使

$$K_m \subset B, K_1 \subset K_2 \subset \cdots, \bigcup_m K_m = B.$$

由于 $x_t \in B$ 等价于对一切充分大的 m , $x_t \in K_m$, 故

$$P_x(h_{K_m} \downarrow h_B) = 1, \quad (x \in R^n), \quad (25)$$

$$\chi(h_{K_m} < \infty) \uparrow \chi(h_B < \infty), \quad (P_x\text{-a.e.}),$$

χ_A 表 A 的示性函数. 将此式双方对 $P_x(dw)$ 积分, 由单调收敛定理得

$$P_x(h_{K_m} < \infty) \uparrow P_x(h_B < \infty). \quad (26)$$

由定理 2, $G\mu_{K_m}(x) \uparrow P_x(h_B < \infty)$. 既然 $\mu_{K_m} \in \mathcal{M}(B)$, 故

$$P_x(h_B < \infty) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(B)} G\mu(x). \quad (27)$$

另一方面, 如 $\mu \in \mathcal{M}(B)$, μ 有紧支集 K , 由(16)(用于 $\mu(K)$)及(8)得

$$\begin{aligned} G\mu(x) &\leq G\mu_K(x) = P_x(h_K < \infty) \\ &\leq P_x(h_B < \infty). \end{aligned} \quad (28)$$

由(27)(28)即得(16)对开集 B 成立#

§ 9. 容 度

(一) 性质. 在 § 8 中, 已对相对紧集 B 定义了容度 $C(B) = \mu_B(\bar{B})$, 故 $C(B)$ 是全体相对紧集类上的集合函数. 由 § 8 (5) (6)

$$C(B) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(h_B < \infty)}{g(x)} = \int_{S_r} DP_\xi(h_B < \infty) U_r(d\xi), \quad (1)$$

其中 $D > 0$ 为某常数, S_r 为 $\bar{B}_r \supset B$ 之球面. 此式把 $C(B)$ 与 $P_x(h_B < \infty)$ 联系起来, 故可通过 $P_x(h_B < \infty)$ 来研究 $C(B)$.

首先注意, 如 $N \subset M$, 则 $h_N \geq h_M$, 又

$$h_{A \cap B} \geq h_A \vee h_B; \quad h_{A \cup B} = h_A \wedge h_B. \quad (2)$$

简记 $(h_A < \infty)$ 为 H_A .

(i) 如 $A \subset B$, 则 $C(A) \leq C(B)$. 此因 $P_x(H_A) \leq P_x(H_B)$.

$$(ii) \quad C(A \cup B) \leq C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

实际上, 利用(2)及 $H_A \cup H_B = H_{A \cup B}$, 得

$$\begin{aligned} P_x(H_{A \cap B}) &\leq P_x(H_A H_B) = P_x(H_A) + P_x(H_B) \\ &\quad - P_x(H_{A \cup B}). \end{aligned}$$

(iii) 设点 $a \in R^n$, 令 $A + a = (x + a; x \in A)$, 则

$$C(A + a) = C(A).$$

此因 $P_x(H_A) = P_{x+a}(H_{A+a})$, 又 $g(x) = c_n |x|^{2-n}$, 故

$$\begin{aligned} C(A + a) &= \lim_{|x+a| \rightarrow \infty} \frac{P_{x+a}(H_{A+a})}{g(x+a)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(H_A)}{g(x)} = C(A). \end{aligned}$$

(iv) $C(-A) = C(A)$.

此因 $P_x(H_A) = P_{-x}(H_{-A})$, 由 $g(x) = g(-x)$

$$C(A) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(H_A)}{g(x)} = \lim_{|-x| \rightarrow \infty} \frac{P_{-x}(H_{-A})}{g(-x)} = C(-A).$$

(v) 设 $a > 0$ 为常数, 则 $C(aA) = a^{n-2}C(A)$.

实际上, 由尺度不变性, 对 $a > 0$ 有

$$P_x\left(\frac{x(a^2t)}{a} \in B\right) = P_{\frac{x}{a}}(x(t) \in B),$$

或

$$P_{ax}\left(\frac{x(a^2t)}{a} \in B\right) = P_x(x(t) \in B),$$

故

$$\begin{aligned} P_{ax}(H_{aB}) &= P_{ax}\left(\text{存在 } t \geq 0, \frac{x(t)}{a} \in B\right) \\ &= P_{ax}\left(\text{存在 } t \geq 0, \frac{x(a^2t)}{a} \in B\right) \\ &= P_x(\text{存在 } t \geq 0, x(t) \in B) = P_x(H_B). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} C(aA) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(H_{aA})}{g(x)} = \lim_{|ax| \rightarrow \infty} \frac{P_{ax}(H_{aA})}{g(ax)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{a^{n-2}P_{ax}(H_B)}{g(x)} = a^{n-2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P_x(H_B)}{g(x)} \end{aligned}$$

$$= a^{n-1}C(A).$$

(vi) 如 B 为相对紧开集, 则

$$C(B) = \sup\{C(K): K \subset B, K \text{ 紧}\}. \quad (3)$$

实际上, 令 $K_m \subset B$, K_m 紧, $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$, $\bigcup_m K_m = B$. 则

由 § 8(26)

$$P_x(H_{K_m}) \uparrow P_x(H_B).$$

由此即可推知 $C(K_m) \uparrow C(B)$, 从而(3)成立. 为证此, 令 D 为相对紧开集, $D \supset \bar{B}$. 显然 $P_x(H_D) = 1$, $x \in K_m$. 由于 μ_{K_m} 的支集含于 K_m , 故

$$\begin{aligned} C(K_m) &= \int_{K_m} P_x(H_D) \mu_{K_m}(dx) = \int_{K_m} G \mu_D(x) \mu_{K_m}(dx) \\ &= \int_{K_m} \int_D g(y-x) \mu_D(dy) \mu_{K_m}(dx) \\ &= \int_D G \mu_{K_m}(y) \mu_D(dy) = \int_D P_y(H_{K_m}) \mu_D(dy) \\ &\uparrow \int_D P_y(H_B) \mu_D(dy) = C(B). \end{aligned}$$

(vii) 如 B 紧, 则

$$C(B) = \inf\{C(U): U \supset B, U \text{ 开}, \bar{U} \text{ 紧}\}. \quad (4)$$

实际上, 取 U_m 为相对紧开集,

$$U_1 \supset \bar{U}_2 \supset U_2 \supset \cdots; \quad \bigcap_m U_m = \bigcap_m \bar{U}_m = B.$$

取 r 充分大, 使 $\bar{B}_r \supset \bar{U}_1$, 则对 $\xi \in S_r$, 有

$$P_\xi(H_{U_m}) \downarrow P_\xi(H_B),$$

(参看 § 8(17)). 由(1)得

$$\begin{aligned} C(U_m) &= \int_{S_r} D P_\xi(H_{U_m}) U_r(d\xi) \\ &\downarrow \int_{S_r} D P_\xi(H_B) U_r(d\xi) = C(B). \end{aligned}$$

(二) 至此我们只对相对紧集定义了容度, 现在希望把它的定义域扩大到一切 Borel 集上去. 为此, 需利用 Choquet 容度理论.

设 E 为局部紧的可分距离空间, K 是 E 中一切紧子集类. 定义在 K 上的实值集函数 φ 称为 Choquet 容度, 如果

(a) 若 $A \in K, B \in K, A \subset B$, 则 $\varphi(A) \leq \varphi(B)$;

(b) 对一切 $A \in K, B \in K$, 有

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) \leq \varphi(A) + \varphi(B);$$

(c) 设 $A \in K$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset A$, 使对任意 $B \in K, A \subset B \subset U$, 有

$$\varphi(B) - \varphi(A) < \varepsilon.$$

利用已给的 $\varphi(A), A \in K$, 可以对 E 的任意子集 A 定义内容度 $\varphi_*(A)$ 及外容度 $\varphi^*(A)$:

$$\varphi_*(A) = \sup\{\varphi(B): B \in K, B \subset A\}, \quad (5)$$

$$\varphi^*(A) = \inf\{\varphi_*(U): U \text{ 为开集}, A \subset U\}. \quad (6)$$

如对某 $A \subset E$, 有

$$\varphi_*(A) = \varphi^*(A), \quad (7)$$

则称 A 为可容的, 并以此公共值作为 A 的 Choquet 容度, 记为 $\tilde{C}(A) (= \varphi^*(A))$. 由 (c), 紧集 B 是可容的, 而且 $\tilde{C}(B) = C(B)$.

Choquet 容度扩张定理. 每一 Borel 集可容.

此定理之证可见文献[1; 24]. 所谓 Borel 集类是指含一切开集的最小 σ 代数. 其实不仅 Borel 集, 更一般的解析集也是可容的. 利用此定理可证明对相当广泛的过程, 解析集的首中时是马氏时间. 还可证明: 如 A_n, A 可容, $A_n \uparrow A$, 则 $\tilde{C}(A_n) \uparrow \tilde{C}(A)$.

现在回到 § 8 (一) 中所定义的容度 $C(B)$, B 为相对紧集. 当限制在 K 上考虑 $C(B)$ 时, 由 (i) (ii) (vi) (vii) 知它

是一 Choquet 容度. 根据扩张定理, 可把它的定义域扩大到一切 Borel 集上而得 $\tilde{C}(B)$.

今证如 B 为相对紧集, 则 $\tilde{C}(B) = C(B)$; 因而新定义与原定义在相对紧集上一致. 一方面

$$\tilde{C}(B) = \sup\{C(A): A \in K, A \subset B\} \leq C(B);$$

另一方面, 如 U 为相对紧开集, 则由 (vi) 及 (5), $\tilde{C}(U) = C(U)$, 故对相对紧集 B ,

$$\begin{aligned}\tilde{C}(B) &= \inf\{\tilde{C}(U): U \text{ 为相对紧开集}, U \supset B\} \\ &= \inf\{C(U): U \text{ 为相对紧开集}, U \supset B\} \geq C(B),\end{aligned}$$

从而 $\tilde{C}(B) = C(B)$.

注 1. 对具体的 B , 要求出它的容度并非容易. 因为由 (1), 这相当于要求出 $P_t(H_B)$. 有时可以利用逼近定理: 如 $B_m \in \mathcal{B}^n$, $B_m \uparrow B$, B 有界, 则 $C(B_m) \uparrow C(B)$; 或者 B_m 紧, $B_m \downarrow B$, 则 $C(B_m) \downarrow C(B)$. 对有些集, 可以找到容度的估值. 例如(见[17]), 设

$$C_L = \left\{x: 0 \leq x_1 < L, \sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1\right\}, L > 0.$$

它是底为 $n-1$ 维单位球高为 L 的圆柱. 则对 $L_0 > 0$, 存在常数 M 及 N , 使

$$ML \leq C(C_L) \leq NL, (L > L_0, n > 3);$$

$$ML/\log L \leq C(C_L) \leq NL/\log L, (L > L_0, n = 3).$$

§ 10. 暂留集的平衡测度

(一) 在 § 8 中, 对相对紧集定义了平衡测度, 并证明了两个重要的结果, 即(8)与(16). 本节将推广这些结果到某些无界集上, 即 § 6 中所定义的暂留集上, 它们依赖于布朗运动本身. 相对紧集都是暂留集 ($n \geq 3$ 时). 回忆暂留集

$B(\in \mathcal{B}^n)$ 的定义是: 对一切 x , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(x_s \in B, \text{ 对某 } s > t) = 0. \quad (1)$$

称 \mathcal{B}^n 上的任一测度 μ 为 Radon 测度, 如对任一紧集 K , 有 $\mu(K) < \infty$.

设 $\mu_n (n \geq 1)$ 及 μ 皆为 Radon 测度, 称 μ_n 淡收敛于 μ (converges vaguely), 如对任一有紧支集的连续函数 φ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu. \quad (2)$$

淡收敛记为 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, $\left(\int = \int_{R^n} \right)$.

设 $\mu_n (n \geq 1)$ 为一列 Radon 测度, 如对每紧集 K , 有 $\sup_n \mu_n(K) < \infty$, 则必存在一列严格上升的整数 $\{n_j\}$ 及

Radon 测度 μ , 使 $\mu_{n_j} \xrightarrow{v} \mu$.

定理 1. 设 B 为暂留集, 则

i) 存在唯一 Radon 测度 μ_B , 其支集含于 ∂B , 使

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty); \quad (3)$$

ii) 如 $B_m (m \geq 1)$ 是任一列相对紧集, 满足

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots; \quad \bigcup_m B_m = B,$$

则当 $m \rightarrow \infty$ 时, 有

$$G\mu_{B_m} \uparrow G\mu_B; \quad \mu_{B_m} \xrightarrow{v} \mu_B.$$

证. 1° 设 $\{B_m\}$ 满足定理条件, 则

$$\bigcup_m (h_{B_m} < \infty) = (h_B < \infty);$$

$$P_x(h_{B_m} < \infty) \uparrow P_x(h_B < \infty).$$

由 § 8(8),

$$G\mu_{B_m}(x) = P_x(h_{B_m} < \infty) \leq P_x(h_B < \infty) \stackrel{(3)}{=} \varphi_B(x). \quad (4)$$

设 K 为任一紧集, 因 $\inf_{y \in K} g(y-x) = c(x) > 0$, 由上式得

$$P_x(h_B < \infty) \geq \int_K g(y-x) \mu_{B_m}(dy) \geq c(x) \mu_{B_m}(K).$$

故 $\sup_m \mu_{B_m}(K) < \infty$. 根据上述, 存在子列 $\mu_{B'_m} \xrightarrow{v} \mu_B$. 其中 μ_B 为某 Radon 测度.

2° 设 $f \geq 0$ 连续, 有紧支集. 由 § 1 引理 4, Gf 有界连续. 以 B_r 表半径为 r , 中心为 0 的闭球, 当 Gf 限制在 B_r 上时, 由 $\mu_{B'_m} \xrightarrow{v} \mu_B$ 得

$$\begin{aligned} A &\stackrel{(1)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_r} Gf(x) \mu_{B'_m}(dx) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} Gf(x) \mu_B(dx) = \int Gf(x) \mu_B(dx) \\ &= \int G\mu_B(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

再由 $G\mu_{B'_m} \uparrow \varphi_B$ 得

$$\begin{aligned} B &\stackrel{(2)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int Gf(x) \mu_{B'_m}(dx) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int G\mu_{B'_m}(x) f(x) dx \\ &= \int \varphi_B(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

利用最后将证明的一个结果: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $r_0 > 0$, 使当 $r \geq r_0$ 时, 有

$$\sup_m \int_{B_r^c} \mu_{B'_m}(dx) Gf(x) < \varepsilon; \quad (7)$$

容易看出, 当 r 充分大时, A 与 B 之值皆在

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int Gf(x) \mu_{B'_m}(dx) \pm \varepsilon$$

之间, 从而 $A = B$, 于是 (5), (6) 之右方值也相等而有

$$\int G\mu_B(x) f(x) dx = \int \varphi_B(x) f(x) dx.$$

由 f 的任意性得

$$G\mu_B(x) = \varphi_B(x), \quad (\text{a. e.})$$

利用 § 8 定理 2 中的同样证法, 即知上式对一切 x 成立. 此得证(3)及 ii) 中第一结论.

3° 若 $\{\mu_{B'_m}\}$ 为 $\{\mu_{B_m}\}$ 的另一子列收敛于某测度 μ'_B 的另一子列, 则同样推理可得 $G\mu'_B(x) = \varphi_B(x) = G\mu_B(x)$. 由唯一性定理 (§ 7. 定理 1) 即得 $\mu'_B = \mu_B$, 因而 $\mu_{B'_m} \xrightarrow{v} \mu_B$. 唯一性定理还表明 μ_B 是唯一的有势为 φ_B 的测度. 下证支集 $\angle \mu_B \subset \partial B$. 取球列 $\{B_m\}$. 令 $C_m = B \cap B_m$, 则 $C_1 \subset C_2 \subset \dots$, $\bigcup_m C_m = B$. 于是 $\mu_{C_m} \xrightarrow{v} \mu_B$. 但 $\angle \mu_{C_m} \subset \partial C_m$, 而且 B 之每一内点必为 C_m (m 充分大) 的内点, 故 $\angle \mu_B \subset \partial B$.

4° 剩下要证(7). 若 $x \in B_r^c$, 则 $H_{B_r^c}(x, dy)$ 集中在点 x 上, 故

$$\begin{aligned} \int_{B_r^c} \mu_{B'_m}(dx) Gf(x) &= \int_{B_r^c} \mu_{B'_m}(dx) H_{B_r^c} Gf(x) \\ &\leq \int \mu_{B'_m}(dx) H_{B_r^c} Gf(x). \end{aligned} \quad (8)$$

在 § 6(13) 中令 $\lambda \rightarrow 0$, 得

$$\int H_{B_r^c}(x, dz) g(y-z) = \int H_{B_r^c}(y, dz) g(x-z).$$

由此及(4)得

$$\begin{aligned} &\int \mu_{B'_m}(dx) H_{B_r^c} Gf(x) \\ &= \iiint \mu_{B'_m}(dx) H_{B_r^c}(x, dz) g(y-z) f(y) dy \\ &= \iiint \mu_{B'_m}(dx) f(y) dy H_{B_r^c}(y, dz) g(x-z) \\ &= \int H_{B_r^c} G\mu_{B'_m}(y) f(y) dy \end{aligned}$$

$$\leq \int H_{B_r^c} \varphi_B(y) f(y) dy.$$

联合(8)即得

$$\int_{B_m^c} Gf(x) \mu_{B_m'}(dx) \leq \int H_{B_r^c} \varphi_B(y) f(y) dy. \quad (9)$$

简写 $h_{B_r^c}$ 为 h . 注意 $\varphi_B \leq 1$; 对 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} H_{B_r^c} \varphi_B(y) &= E_y[\varphi_B(x(h))] = E_y[\varphi_B(x(h)), h \leq t] \\ &\quad + E_y[\varphi_B(x(h)), h > t] \leq P_y(h \leq t) + T_t \varphi_B(y). \end{aligned} \quad (10)$$

因 B 为暂留集, 故

$$T_t \varphi_B(y) = P_y(x(s) \in B, \text{ 对某 } s > t) \downarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty).$$

又因 $P_y(\lim_{r \rightarrow \infty} h = \infty) = 1$, 故 $\lim_{r \rightarrow \infty} P_y(h \leq t) = 0$, 于是由

(10), $\lim_{r \rightarrow \infty} H_{B_r^c} \varphi_B(y) = 0$. 既然 f 有紧支集, 由控制收敛定理,

当 r 充分大时, (9)式右方积分小于任意给定的 $\varepsilon > 0$; 于是左方对一切 m 也如此, 此得证(7)。

我们称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度, 其势称为平衡势。

(二) 在 § 9 中, 对任一 Borel 集 B , 定义了容度 $\tilde{C}(B)$, 它是由相对紧集的容度经扩张后而来的. 自然要问: 当 B 为暂留集时, 其平衡测度的全部质量 $\mu_B(R^n)$ 是否等于 $\tilde{C}(B)$? 为此, 需要下列引理.

引理 1. 设 B 为暂留集, 又 $A \subset B$, 则

$$\mu_A(R^n) \leq \mu_B(R^n). \quad (11)$$

证. 以 $\{D_m\}$ 表一系列上升的相对紧集, 其和为 R^n . 由定理 1 得

$$\begin{aligned} \int \mu_A(dx) G \mu_{D_m}(x) &= \int \mu_{D_m}(dx) G \mu_A(x) \\ &= \int \mu_{D_m}(dx) P_x(h_A < \infty) \leq \int \mu_{D_m}(dx) P_x(h_B < \infty) \end{aligned}$$

$$= \int \mu_{D_m}(dx) G\mu_B(x) = \int \mu_B(dx) G\mu_{D_m}(x).$$

由于

$$G\mu_{D_m}(x) = P_x(h_{D_m} < \infty) \uparrow 1,$$

故由单调收敛定理得证(11)。

定理 2. 设 B 为暂留集,

i) 如 $\{B_m\}$ 为相对紧集列, $B_1 \subset B_2 \subset \dots, \bigcup_m B_m = B$,

则 $C(B_m) \uparrow \tilde{C}(B)$;

ii) $\tilde{C}(B) = \mu_B(R^n)$.

证. 1° 由 $C(B_m) = \mu_{B_m}(R^n)$ 及(11), 得

$$C(B_1) \leq C(B_2) \leq \dots \leq \mu_B(R^n). \quad (12)$$

以 f_r ($r \geq 1$) 表有紧支集的连续函数. $0 \leq f_r \leq 1$, $f_r \uparrow 1$, ($r \rightarrow \infty$), 有

$$C(B_m) \geq \int f_r(x) \mu_{B_m}(dx).$$

既然 $\mu_{B_m} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mu_B$, 得 $\lim_{m \rightarrow \infty} C(B_m) \geq \int f_r(x) \mu_B(dx)$. 再令 $r \rightarrow \infty$,

有 $\lim_{m \rightarrow \infty} C(B_m) \geq \mu_B(R^n)$. 结合(12)得

$$C(B_m) \uparrow \mu_B(R^n). \quad (13)$$

2° 下面分两种情况. 先设 $\mu_B(R^n) = \infty$, 对任意 $N > 0$, 必有 m 使 $C(B_m) \geq 2N$. 由于

$$C(B_m) = \sup\{C(K): K \subset B_m, K \text{ 紧}\}, \quad (14)$$

故必有紧集 $K \subset B_m \subset B$ 使 $C(K) > N$; 从而

$$\tilde{C}(B) = \sup\{C(K): K \subset B, K \text{ 紧}\} = \infty = \mu_B(R^n).$$

次设 $\mu_B(R^n) < \infty$. 对 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使 $C(B_m) \geq \mu_B(R^n) - \varepsilon$. 由(14), 有紧集 $K \subset B_m \subset B$, 使

$$C(K) \geq C(B_m) - \varepsilon \geq \mu_B(R^n) - 2\varepsilon.$$

故 $\tilde{C}(B) \geq \mu_B(R^n)$. 联合(13)即得 $\tilde{C}(B) = \mu_B(R^n)$ 。

(三) 现在来推广 § 8(16), 它是概率论与势论间的一重要联系.

定理 3. 设 B 为闭集, 则

$$P_x(h_B < \infty) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(B)} G\mu(x). \quad (15)$$

证. 因 B 闭, 可以找到紧集 $B_n \subset B$, $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$,

$\bigcup_n B_n = B$. 由 § 8 定理 2

$$G\mu_{B_n}(x) = P_x(h_{B_n} < \infty) \wedge P_x(h_B < \infty), \\ (n \rightarrow \infty). \quad (16)$$

另一方面, 设 $\mu \in \mathcal{M}(B)$, 其紧支集含于 B_n . 由 § 8(22), (23)

$$G\mu(x) \leq G\mu_{B_n}(x) = P_x(h_{B_n} < \infty) \leq P_x(h_B < \infty).$$

由此及(16)即得(15)*

系 1. 闭集 B 为暂留集的充要条件是: 存在 Radon 测度 μ_B , 其支集含于 ∂B , 使

$$G\mu_B(x) = \sup\{G\mu(x) : \mu \in \mathcal{M}(B)\}. \quad (17)$$

证. 必要: 由定理 1 与 3 得

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty) = \sup\{G\mu(x) : \mu \in \mathcal{M}(B)\}.$$

充分: 由(17)及定理 3

$$G\mu_B(x) = \sup\{G\mu(x) : \mu \in \mathcal{M}(B)\} = P_x(h_B < \infty),$$

$$T_t G\mu_B(x) = T_t P_x(h_B < \infty) = P_x(x_t \in B, \text{对某 } s > t).$$

令 $t \rightarrow \infty$, 仿 § 8 定理 2 之证, 知左方趋于 0. 故 B 暂留*.

对暂留集 B 称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度, 已证明 $\text{supp } \mu_B \subset \partial B$, $\mu_B(R^n) = \tilde{C}(B)$, 故它与容量的扩张理论是相容的.

§ 11. 极 集

(一) λ -势. 本节讨论集为极集的条件. 回忆集 $B \in \mathcal{B}^n$

称为极集, 如 $P_x(h_B < \infty) = 0$. 以下会看到, 这些条件可以通过容度、规则点或势来表达. 对 $\lambda > 0$, 令

$$H_B^\lambda(x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in A), \quad (1)$$

$$\mu_B^\lambda(A) = \lambda \int H_B^\lambda(x, A) dx. \quad (2)$$

下引理表明: $E_x e^{-\lambda h_B}$ 是 μ_B^λ 的 λ -势. 即

引理 1. 对任意 $B \in \mathscr{B}^n$, 有

$$E_x e^{-\lambda h_B} = \int g^\lambda(y-x) \mu_B^\lambda(dy) \quad (= G^\lambda \mu_B^\lambda(x)). \quad (3)$$

证. 将 § 6(12) 双方对 $x \in R^n$ 积分, 并利用

$$\begin{aligned} \int g^\lambda(x) dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int p(t, x) dx dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

得

$$1 = \int_B \mu_B^\lambda(dz) g^\lambda(y-z) + \lambda \int g_B^\lambda(x, y) dx. \quad (5)$$

由 g_B^λ 的对称性及 § 6(7)

$$\begin{aligned} \int g_B^\lambda(x, y) dx &= \int g_B^\lambda(y, x) dx \\ &= E_y \int_0^{h_B} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} [1 - E_y e^{-\lambda h_B}]. \end{aligned} \quad (6)$$

代入(5)并利用 g^λ 的对称性即得(3).

系 1. 设 $n \geq 2$, 可列点集为极集.

证. 利用 $P_x(h_{\bigcup_m A_m} < \infty) \leq \sum_m P_x(h_{A_m} < \infty)$ 知, 可列

多个极集的和为极集. 故只要证单点集为极集. 在(3)中取

$B = \{a\}$, 得

$$E_x e^{-\lambda h_a} = g^\lambda(a-x) \mu_a^\lambda(a), \quad (a = \{a\}), \quad (7)$$

令 $x \rightarrow a$, 左方界于 0 与 1 之间, 而由 $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow a} g^1(a-x) = g^1(0) = \infty$, 故必 $\mu_a^1(a) = 0$. 于是 $E_x e^{-\lambda h_a} = 0$, 从而 $P_x(h_a < \infty) = 0$.

注意, μ_B^1 集中在 \bar{B} 上, 又 $g^1(x)$ 当 x 在紧集上变动时, 下界大于 0. 故由(3)知, 如 \bar{B} 紧, 则 $\mu_B^1(\bar{B}) < \infty$. 令

$$C^1(B) = \mu_B^1(\bar{B}). \quad (8)$$

引理 2. 设 B 与 B_m 皆紧, 又

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots, \quad \bigcap_m B_m = B.$$

则有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C^1(B_m) = C^1(B). \quad (9)$$

证. 将(3)双方对 $x \in R^n$ 积分, 利用(4)

$$\begin{aligned} \int E_x e^{-\lambda h_B} dx &= \iint g^1(y-x) dx \mu_B^1(dy) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int \mu_B^1(dy) = \frac{1}{\lambda} \mu_B^1(\bar{B}) = \frac{1}{\lambda} C^1(B), \end{aligned}$$

故得

$$C^1(B) = \lambda \int E_x e^{-\lambda h_B} dx, \quad C^1(B_m) = \lambda \int E_x e^{-\lambda h_{B_m}} dx. \quad (10)$$

故由 § 6 引理 1 及 § 3 定理 4

$$E_x e^{-\lambda h_{B_m}} \downarrow E_x e^{-\lambda h_B} \quad (L-a. e. x).$$

由此及(10)即得(9) #

(二) 充要条件.

定理 1. 设 K 为紧集, 又 $\sup_x E_x e^{-\lambda h_K} = \beta < 1$, 则 K 为极集.

证. 取一系列紧集 $K_m \supset K$, 使

$$K_1 \supset \overset{\circ}{K}_1 \supset K_2 \supset \overset{\circ}{K}_2 \supset \cdots, \quad \bigcap_m K_m = \bigcap_m \overset{\circ}{K}_m = K.$$

由 $y \in K \subset \overset{\circ}{K}_m \subset K'_m$, 得

$$E_y e^{-\lambda h_{K_m}} = 1. \quad (11)$$

一方面

$$\begin{aligned} & \iint g^\lambda(y-x) \mu_K^\lambda(dy) \mu_{K_m}^\lambda(dx) \\ &= \int_{K_m} (E_x e^{-\lambda h_K}) \mu_{K_m}^\lambda(dx) \leq \beta C^\lambda(K_m). \end{aligned}$$

另一方面, 由(11)

$$\begin{aligned} & \iint g^\lambda(y-x) \mu_K^\lambda(dy) \mu_{K_m}^\lambda(dx) \\ &= \int_K (E_y e^{-\lambda h_{K_m}}) \mu_K^\lambda(dy) = C^\lambda(K). \end{aligned}$$

由此及引理 2

$$C^\lambda(K) \leq \beta C^\lambda(K_m) \downarrow \beta C^\lambda(K).$$

故 $C^\lambda(K) = 0$. 由(3), $E_x e^{-\lambda h_K} = 0$; $P_x(h_K < \infty) = 0$.

在 § 3 中, 我们称可测集 B 为疏集, 如 $B^c = \emptyset$ (空集). 直观地说, 疏集是自任一点都不能立刻命中的集. 下定理表示: 如一紧集自任一点都不能立刻击中, 那么它自任一点都永远不能击中.

定理 2. 设 A 紧, 则 A 为极集的充要条件是它为疏集.

证. 必要: 由 $P_x(h_A = 0) \leq P_x(h_A < \infty)$ 知极集必疏.

充分: 1° 先证 $E_x e^{-\lambda h_A}$ 对 x 下连续. 由 § 3 定理 3, $P_x(h_A \leq t)$ 下连续. 由 Fatou 引理及分部积分, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} E_x e^{-\lambda h_A} &= \lim_{x \rightarrow a} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dP_x(h_A \leq t) \\ &\geq \lim_{x \rightarrow a} \lambda \int_0^\infty P_x(h_A \leq t) e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

$$\geq \lambda \int_0^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} P_x(h_A \leq t) e^{-\lambda t} dt$$

$$\geq \lambda \int_0^{\infty} P_a(h_A \leq t) e^{-\lambda t} dt = E_a e^{-\lambda h_A}.$$

2° 令 $A_m = \left(x: E_x e^{-\lambda h_A} \leq 1 - \frac{1}{m} \right) \cap A \subset A$; 由 1° 知

A_m 紧. 根据引理 1, 对 $x \in A_m$, 有

$$G^\lambda \mu_{A_m}^\lambda(x) = E_x e^{-\lambda h_{A_m}} \leq E_x e^{-\lambda h_A} \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

由 § 7 极大原理(定理 2'), 上式对一切 $x \in R^n$ 成立. 由定理

1 知 A_m 为极集. 因 $A' = \emptyset$, 故 $A = \bigcup_m A_m$ 也是极集.

定理 3. 如 B 紧, 则 $B \cap (B')^c$ 为极集.

证. 注意如 $N \supset M$, $x \in N'$, 则显然 $x \in M'$. 对正整数 m , 令

$$B_m = B \cap \left(x: E_x e^{-\lambda h_B} \leq 1 - \frac{1}{m} \right) = B \cap D_m.$$

任取 $x \in R^n$. 或者 $x \in B'$, 由上述事实知 $x \in B'_m$. 或者 $x \in B'$, 因之 $P_x(h_B = 0) = 1$ 而 $x \in D_m$. 既然 $E_x e^{-\lambda h_B}$ 对 x 下连续, D_m 闭, 故 $x \in D'_m$. 再利用上事实, $x \in B'_m$. 于是得知 $B'_m = \emptyset$. 由定理 2, B_m 为极集. 从而

$$B \cap (B')^c = \bigcup_m B_m$$

也是极集.

定理 4. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, ($n \geq 3$), 则 B 为极集的充要条件是下二者之一:

(i) B 的任一紧子集为极集;

(ii) 容度 $\tilde{C}(B) = 0$.

证. (i) 必要性显然. 反之, 设紧子集 $K \subset B$ 为极集, 由 § 8 系 1, $C(K) = 0$. 于是对 B 的任意相对紧子集 A , 有

$$C(A) = \tilde{C}(A) = \sup\{C(K): K \subset A, K \text{ 紧}\} = 0.$$

再由 § 8 系 1, A 为极集. 特别, $B \cap B_m$ 为极集, 其中 $B_m = \{x: |x| \leq m\}$. 由 $B = \bigcup_m (B \cap B_m)$ 知 B 为极集.

(ii) 若 B 为极集, 则其紧子集为极集. 由 § 8 系 1

$$\tilde{C}(B) = \sup\{C(K): K \subset B, K \text{ 紧}\} = 0.$$

反之, 如 $\tilde{C}(B) = 0$, 则对其任意紧子集 K , 有 $C(K) = 0$, 故 K 为极集. 由 (i) 即知 B 为极集.*

回忆 § 8 (三) 中 $\mathcal{M}(B)$ 的定义,

定理 5. 设 $B \in \mathcal{B}^n$, ($n \geq 3$), 则 B 为极集的充要条件是 $\mathcal{M}(B) = \emptyset$; 或等价地, 对任意测度 μ , 其支集 $K \subset B$, $0 < \mu(B) < \infty$, 有 $\sup_x G\mu(x) = \infty$.

证. 只需证后一结论. 设有如上之 μ , 使 $\sup_x G\mu(x) \leq M < \infty$, 则 $\frac{\mu}{M} \in \mathcal{M}(K) \subset \mathcal{M}(B)$. 显然, 由 § 8(16),

$$P_x(h_B < \infty) \geq P_x(h_K < \infty) \geq G\mu(x)/M.$$

因 μ 非 0, 由 § 7 唯一性定理, 至少有一 x , 使 $G\mu(x) > 0$. 对此 x , $P_x(h_B < \infty) > 0$, 故 B 非极集.

反之, 如 B 非极集, 由定理 4(i), B 必有某紧子集 K , 它非极集, 即 $P_x(h_K < \infty) > 0$ 对某 x 成立. 考虑 K 的平衡测度 μ_K , 由 § 8 定理 2

$$0 < P_x(h_K < \infty) = G\mu_K(x) \leq 1.$$

故 μ_K 使 $\sup_x G\mu_K(x) = \infty$ 不成立.*

§ 12. 末 遇 分 布

(一) 末遇时与末遇点. 对 $B \in \mathscr{B}^n$, $n \geq 3$, 定义 B 的末遇时为

$$l_B(\omega) = \begin{cases} \sup(t > 0, x_t(\omega) \in B), & \text{如右集非空,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (1)$$

并称 $x(l_B)$ 为 B 的末遇点. 由于

$$(l_B > t) = (\theta_t h_B < \infty), \quad (2)$$

故 l_B 是一随机变量.

本节中, 设 B 为暂留集, μ_B 表 § 10 定理 1 中的 Radon 测度. 当 B 为相对紧集时, μ_B 即 B 的平衡测度.

定理 1. 自 $x \in R^n$ 出发, l_B 的分布在 $(0, \infty)$ 绝对连续, 而且有密度为

$$\int p(t, x, z) \mu_B(dz), \quad (t > 0).$$

证. 由(1)及 § 10 定理 1

$$\begin{aligned} P_x(l_B > t) &= P_x(\theta_t h_B < \infty) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty) \\ &= \int p(t, x, y) P_y(h_B < \infty) dy \\ &= \int p(t, x, y) G \mu_B(y) dy \\ &= \int p(t, x, y) \int g(y, z) \mu_B(dz) dy \\ &= \int p(t, x, y) \left[\int_0^\infty p(s, y, z) ds \right] \mu_B(dz) dy \\ &= \int_0^\infty \int p(s+t, x, z) \mu_B(dz) ds \\ &= \int_t^\infty \left[\int p(s, x, z) \mu_B(dz) \right] ds \end{aligned}$$

系 1.

$$E_x(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0) = \int g^\lambda(x, y) \mu_B(dy), \quad (\lambda \geq 0). \quad (3)$$

证. 左方等于

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{\infty} e^{-\lambda t} P_x(l_B \in dt) &= \int_{0+}^{\infty} e^{-\lambda t} \int p(t, x, z) \mu_B(dz) dt \\ &= \int g^\lambda(x, z) \mu_B(dz) \end{aligned}$$

以 $L_B(x, A) = P_x(x(l_B) \in A, l_B > 0)$ 表末遇点分布, 则有下列定理, 它由 Chung^[3] 得到.

定理 2.

$$L_B(x, A) = \int_A g(x, y) \mu_B(dy), \quad (x \in R^n, A \subset \mathcal{B}^n). \quad (4)$$

证. 取 $f \geq 0$ 为 R^n 上连续函数, 有紧支集, 且在 x 之某邻域为 0. 因为在 $(l_B > t)$ 上, 有 $l_B = t + \theta_t l_B$, 故对 $\lambda \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x[f(x(l_B - t)); l_B > t] dt \\ &= E_x \left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda t} f(x(l_B - t)) dt \right] \\ &= E_x \left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda(l_B - t)} f(x(t)) dt \right] \\ &= E_x \left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda \theta_t l_B} f(x(t)) dt \right] \\ &= \int_0^\infty E_x[e^{-\lambda \theta_t l_B} f(x(t)); l_B > t] dt \\ &= \int_0^\infty E_x[f(x(t)) E_{x(t)}(e^{-\lambda l_B}; l_B > 0)] dt \\ &= \int_0^\infty \int f(x) E_x(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0) p(t, x, z) dz dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int g(x, z) f(z) \left[\int g^A(z, y) \mu_B(dy) \right] dz \quad (\text{由(3)}) \\
&= \int g(x, z) f(z) \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, z, y) dt \mu_B(dy) \right] dz \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int \int p(t, z, y) f(z) g(x, z) dz \mu_B(dy) \right] dt.
\end{aligned}$$

两边取反拉氏变换可知, 对 L -a. e. $t \in (0, \infty)$, 有

$$\begin{aligned}
&E_x[f(x(l_B - t)); l_B > t] \\
&= \int \int p(t, z, y) f(z) g(x, z) dz \mu_B(dy). \quad (5)
\end{aligned}$$

注意 $f(\cdot)g(x, \cdot)$ 连续而且有紧支集. 由于(5)中二方皆对 t 连续, 故(5)对一切 $t > 0$ 成立. 在(5)中令 $t \rightarrow 0$, 得

$$E_x[f(x(l_B)); l_B > 0] = \int f(y) g(x, y) \mu_B(dy).$$

故

$$P_x(l_B > 0, x(l_B) \in A) = \int_A g(x, y) \mu_B(dy). \quad (6)$$

对 $A \subset R^n \setminus \{x\}$ 成立. 因

$$P_x(l_B > 0) = P_x(h_B < \infty) = \int g(x, y) \mu_B(dy),$$

故(6)对一切 $A \subset R^n$ 成立.

系 2.

$$P_x(l_B > t, x(l_B) \in A) = \int_A \left[\int_t^\infty p(s, x, z) ds \right] \mu_B(dz). \quad (7)$$

证. 左式等于

$$\begin{aligned}
&P_x(\theta_t(l_B > 0, x(l_B) \in A)) \\
&= E_x P_{x(t)}(l_B > 0, x(l_B) \in A) \\
&= \int p(t, x, y) P_y(l_B > 0, x(l_B) \in A) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int p(t, x, y) \int_A g(y, z) \mu_B(dz) dy \\
 &= \int_A \left(\int_t^\infty p(s, x, z) ds \right) \mu_B(dz)
 \end{aligned}$$

系 3. 对相对紧集 B , 有

$$L_B(x, dy) = g(x, y) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{H_B(z, dy)}{g(z, y)}, \quad (8)$$

其中 $H_B(z, A) = P_z(x(h_B) \in A)$ 为首中点分布.

证. 由(6)及 § 8(5)

$$\frac{L_B(x, dy)}{g(x, y)} = \mu_B(dy) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{H_B(z, dy)}{g(z, y)}.$$

再注意 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z, y)}{g(z)} = 1$ 即得(8).

因之末遇点分布可通过首中点分布来表达.

(二) 球的情形. 自 x 出发, $|x| < r$, 则 B_r 与 S_r 之末遇时同分布, 末遇点也同分布. 以下的定理 3—7 皆首见于文献[21, 23], 定理 3 也在文献[10]中得到.

定理 3. 自 0 出发, 球面 S_r 之末遇时 l_{S_r} 的分布 $P_0(l_{S_r} \leq t)$ 对 $t > 0$ 绝对连续, 有密度为

$$f(t) = \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} t^{-n/2} e^{-r^2/2t}, \quad (t > 0). \quad (9)$$

证. 由定理 1 及 § 8 例 1

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int p(t, x, z) \mu_{S_r}(dz) \\
 &= \frac{r^{n-2}}{c_n} \int_{S_r} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/2t} U_r(dy) \\
 &= \frac{r^{n-2}}{c_n |S_r| (2\pi t)^{n/2}} \int_{S_r} e^{-|y|^2/2t} L_{n-1}(dy). \quad (10)
 \end{aligned}$$

将 § 1 (12) 对 r 微分, 得

$$\int_{S_r} f(|y|) L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} f(r).$$

特别

$$\int_{S_r} e^{-|y|^2/2t} L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} e^{-r^2/2t}. \quad (11)$$

以此代入 (10), 并注意

$$c_n |S_r| = \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) r^{n-1} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

即得证 (9)。

至于球面 S_r 的末遇点分布, 则有

$$L_{S_r}(x, dy) = \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}} U_r(dy), (x \in R^n). \quad (12)$$

实际上, 由 (4)

$$\begin{aligned} L_{S_r}(x, dy) &= g(x, y) \mu_{S_r}(dy) \\ &= \frac{c_n}{|y-x|^{n-2}} \cdot \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(dy) \\ &= \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}} U_r(dy). \end{aligned}$$

特别, 由 (12) 及 § 3 定理 2, 知

$$P_0(x(h_r) \in A) = U_r(A) = P_0(x(l_{S_r}) \in A).$$

即自 0 出发, S_r 之首中点与末遇点同分布, 即球面上之均匀分布.

定理 4. 对 $n (\geq 3)$ 维布朗运动, 当且只当 $m < \frac{n}{2} - 1$

时, $E_0(l_{S_r})^m < \infty$, 而且

$$E_0(l_{S_r})^m = r^{2m} / (n-4)(n-6) \cdots (n-2m-2),$$

$$(n > 4). \quad (13)$$

证. 由(9)

$$E_0(l_{S_r})^m = \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \int_0^\infty s^{m-\frac{n}{2}} e^{-r^2/2s} ds$$

$$= \frac{r^{2m}}{2^m \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-m-2} e^{-u} du.$$

后一积分当且只当 $\frac{n}{2} > m + 1$ 时收敛, 其值为 $\Gamma\left(\frac{n}{2} - m - 1\right)$. 利用等式 $\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} - m - 1\right) \prod_{i=1}^m \left(\frac{n}{2} - i - 1\right)$, 即得(13)。

于是此矩有成双性质: $n = 3, 4$ 时, $E_0(l_{S_r}) = \infty$; $n = 5, 6$ 时, $E_0(l_{S_r}) < \infty$; $n = 7, 8$ 时, $E_0(l_{S_r})^2 < \infty$ 等等.

关于矩还有一有趣性质: 由 § 3 注 2、§ 3 定理 1 以及本节(13), 以 $L_r^{(n)}$, $h_r^{(n)}$ 及 $T_r^{(n)}$ 分别表 n 维空间中布朗运动对 S_r 的末遇时、首中时及在 B_r 中的停留时间

$$T_r^{(n)} = \int_0^\infty \chi_{B_r}(x_t) dt,$$

(χ_A 表 A 的示性函数), 则有

$$E_0[h_r^{(n)}] = E_0[T_r^{(n+2)}] = E_0[L_r^{(n+4)}] = \frac{r^2}{n}, \quad (n \geq 1). \quad (14)$$

在 § 3 注 2 中已知 $h_r^{(n)}$ 与 $T_r^{(n+2)}$ 关于 P_0 同分布; 上式可视为此事实在矩的方面的延拓. (14) 式还反映布朗粒子逃逸速度随维数 n 增高而加大.

以下固定 $n \geq 3$, 简写 $l_r^{(n)}$ 为 $l_r (\equiv l_{S_r})$, $h_r^{(n)}$ 为 h_r , 并定义

$$M_r = \max_{0 \leq t \leq l_r} |x(t)|, \quad \alpha_r = \min_t (|x_t| = M_r, \quad t \leq l_r). \quad (15)$$

M_r 是 n 维布朗运动粒子在末遇球面 S_r 前所走的极大游程, 即与原点的最大距离, 而 α_r 为首达极大的时刻.

定理 5. 对 $x, |x| \leq r$, 有

$$P_x(M_r \leq a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leq r, \\ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \quad (16)$$

证 先设 $a > r$.

$$\begin{aligned} P_x(M_r \geq a) &= P_x(l_r > h_a) \\ &= \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db) P_b(l_r > 0). \end{aligned}$$

当 $b \in S_r$ 时, $|b| = a > r$. 由 § 4(15), 得

$$P_b(l_r > 0) = p_b(h_r < \infty) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2};$$

$$\begin{aligned} P_x(M_r \geq a) &= \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db) \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}; \end{aligned}$$

$$P_x(M_r > a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \geq a + \varepsilon) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

次设 $a < r$. 由 M_r 之定义, 显然有 $P_x(M_r \leq a) = 0$.
最后设 $a = r$. 由已证明的二结果得

$$\begin{aligned} P_x(M_r = r) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} p_x(r - \varepsilon < M_r \leq r + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P_x(M_r \leq r + \varepsilon) - P_x(M_r \leq r - \varepsilon)] \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[1 - \left(\frac{r}{r + \varepsilon} \right)^{n-2} \right] = 0,$$

$$P_x(M_r \leq r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \leq r - \varepsilon) \\ + P_x(M_r = r) = 0_*$$

由(16)知 $P_x(M_r \leq a)$ 不依赖于 x , $|x| \leq r$. 它有密度

$$g_r(a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leq r, \\ (n-2)r^{n-2}/a^{n-1}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \quad (17)$$

其 m 级矩为

$$E_x(M_r^m) = (n-2)r^{n-2} \int_r^\infty a^m a^{1-n} da \\ = \begin{cases} \infty, & \text{如 } m \geq n-2, \\ \frac{n-2}{n-m-2} r^m, & \text{如 } m < n-2, \end{cases} \\ (|x| \leq r). \quad (18)$$

由此知: $n=3$ 时, $E_x(M_r) = \infty$; $n=4$ 时, $E_x(M_r) < \infty$, 但二级矩不存在; $n=5$ 时, $E_x(M_r^2) < \infty$, 但三级矩不存在; 等等.

今引入二特征数 C_I 及 C_M :

$$C_I = \text{Max (整数 } m \geq 0, E_0(I_r^m) < \infty),$$

$$C_M = \text{Max (整数 } m \geq 0, E_0(M_r^m) < \infty).$$

由(13)及(18)知它们依赖于空间维数 n , 但不依赖于球的半径 $r > 0$; 而且还有下表

n	3	4	5	6	$2k-1$	$2k$
C_I	0	0	1	1		$k-2$	$k-2$
C_M	0	1	2	3		$2k-4$	$2k-3$

这说明 $2k-1$ 与 $2k$ 维布朗运动, 虽有相同的 $C_I = k-2$,

却有不同 C_M , 分别为 $2k-4$ 与 $2k-3$. 用 C_l 可以把各维布朗运动按维数一对一对地区别开来, 而用 C_M 则可一一地分开. 在此意义上, C_M 比 C_l 更精确些.

现在讨论 M_r 的修正变量 N_r ,

$$N_r = \frac{M_r - r}{\sqrt{D_x M_r}} \quad (n > 4). \quad (19)$$

N_r 依赖于 n , 又 D 表方差. 由(18), 当 $|x| \leq r$ 时

$$E_x(M_r) = \frac{n-2}{n-3} r, \quad D_x(M_r) = \frac{n-2}{(n-3)^2(n-4)} r^2. \quad (20)$$

定理 6. 当 $|x| \leq r$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_x(N_r \leq a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leq 0; \\ 1 - e^{-a}, & \text{如 } a > 0. \end{cases} \quad (21)$$

证.

$$\begin{aligned} P_x(N_r > a) &= P_x \left(\frac{M_r - r}{\frac{r}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}}} > a \right) \\ &= P_x \left(M_r > \frac{ar}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r \right). \end{aligned}$$

由定理 5, 当 $\frac{ar}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r \leq r$ 时, 亦即当 $a \leq 0$ 时, 有 $P_x(N_r > a) = 1$. 由此得(21)中第一结论. 当 $a > 0$ 时, 仍由定理 5,

$$\begin{aligned} P_x(N_r > a) &= \left[r / \left(\frac{ar}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r \right) \right]^{n-2} \\ &= 1 / \left[1 + \frac{a}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}} \right]^{n-2} \left(1 + \frac{a}{n-3} \sqrt{\frac{n-2}{n-4}} \right) \\ &\rightarrow e^{-a}, \quad (n \rightarrow \infty)_n \end{aligned}$$

今以 q_{ni} 表 Bessel 函数 $J_\nu(z)$ $\left(\nu = \frac{n}{2} - 1\right)$ 的正零点,

又

$$\xi_{ni} = q_{ni}^{n-2} / 2^{n-1} \Gamma(\nu + 1) J_{\nu+1}(q_{ni}).$$

定理 7.

$$(i) \quad P_0(\alpha_r > t) = (n-2)r^{n-2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni}$$

$$\cdot \int_r^{\infty} \frac{1}{a^{n-1}} e^{-q_{ni}^2 t / 2a^2} da;$$

$$(ii) \quad E_0 \alpha_r = \frac{n-2}{n(n-4)} r^2, \quad (n > 4).$$

证. α_r 是首中随机球面 S_{M_r} 的时间, 亦即 $\alpha_r = h_{M_r}$. 由此及(17)得

$$\begin{aligned} P_0(\alpha_r > t) &= P_0(h_{M_r} > t) = \int_r^{\infty} P_0(h_a > t) P_0(M_r \in da)^{1)} \\ &= \int_r^{\infty} P_0(h_a > t) \frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}} da. \end{aligned}$$

以 § 3(10)代入上式即得证 (i). 其次

$$\begin{aligned} E_0 \alpha_r &= \int_0^{\infty} P_0(\alpha_r > t) dt \\ &= \int_r^{\infty} \left[\int_0^{\infty} P_0(h_a > t) dt \right] \frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}} da, \end{aligned}$$

但由(14)

$$\int_0^{\infty} P_0(h_a > t) dt = E_0(h_a) = \frac{a^2}{n}.$$

故

1) 可以证明: 当 $r < a \leq b$ 时, 有

$$P_0(h_a > t, M_r \geq b) = P_0(h_0 > t) \cdot P_0(M_r \geq b).$$

$$E_0 \alpha_r = \frac{(n-2)r^{n-2}}{n} \int_r^\infty \frac{da}{a^{n-3}} = \frac{n-2}{n(n-4)} r^2$$

于是对同一 n , 同一半径 r , 由上式及(14)得

$$\begin{aligned} E_0 h_r &= \frac{r^2}{n} < E_0 T_r = \frac{r^2}{n-2} < E_0 \alpha_r \\ &= \frac{n-2}{n(n-4)} r^2 < E_0 J_r = \frac{r^2}{n-4}, \end{aligned}$$

其中 $E_0 T_r < E_0 \alpha_r$ 不是直观上可以预料的.

§ 13. 格林 (Green) 函数

(一) 上调和(superharmonic) 函数. 设 $G \subset R^n$ 为一开集, 取值于 $(-\infty, \infty]$ 、但在 G 的任一连通成分中都不恒等于 ∞ 的函数 $f(x)$, ($x \in G$) 称为在 G 内上调和, 如果

1° f 下连续于 G ;

2° 对每 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使当球 $B_\delta(x) \subset G$ 时, 对每 $0 < r < \delta$, 有

$$\int_{S_r(x)} f(y) U_r(dy) \leq f(x) \quad (1)$$

U_r 表 $S_r(x)$ 上的均匀分布.

利用布朗运动, 条件(1)可改写为

$$E_x f(x_\tau) \leq f(x) \quad (2)$$

τ 为 $\bar{B}_r(x)$ 的首出时, 亦即 $S_r(x)$ 的首中时.

称函数 f 在 G 内下调和 (subharmonic), 如一 f 在 G 内上调和.

显然, 常数在 R^n 内上(下)调和; 在 G 内调和的函数在 G 内上(下)调和.

以下皆设 $n \geq 3$.

由 § 4 例 1, $g(y-x) = c_n/|y-x|^{n-2}$ 作为 y 的函数,

在 $R^n \setminus \{x\}$ 调和, 在 R^n 为上调和.

容易证明, 势 $G\mu(x) = \int g(y-x)\mu(dy)$ 如不恒等于 ∞ , 则它在任一开集 D 内为上调和. 实际上, 在 § 7 定理 2 之证中, 已证明 $G\mu(x)$ 下连续. 其次, 利用 $g(y-x)$ 的上调和性, 有

$$\begin{aligned} \int_{S_r(x)} G\mu(y) U_r(dy) &= \int_{S_r(x)} \int g(z-y) d\mu(z) U_r(dy) \\ &= \iint_{S_r(x)} g(z-y) U_r(dy) d\mu(z) \\ &\leq \int g(z-x) d\mu(z) = G\mu(x). \end{aligned} \quad (3)$$

由于上调和函数的非负线性组合也上调和, 故如 $h(x)$ 为开集 D 中调和函数, 则

$$f(x) = Gu(x) + h(x) \quad (x \in D) \quad (4)$$

也在 D 中为上调和.

有趣的是反面的结果也成立: 设 $f(x)$ 在开集 D 内上调和, 则 f 可表为

$$f(x) = G_D\mu(x) + h(x), \quad (5)$$

其中 $h(x)$ 在 D 内调和, 而且是在 D 内不超过 f 的最大调和函数; $G_D\mu(x)$ 为格林势, 即

$$G_D\mu(x) = \int g_D^*(x, y) \mu(dy), \quad (6)$$

其中 $g_D^*(x, y)$ 是下面即将定义的 D 的格林函数, 而 μ 为支集含于 D 的 Radon 测度, 而且 μ 被 f 唯一决定.

(5) 式称为 f 的 Riesz 分解, 它与以下诸结论之证可见文献[17].

调和函数有很好的解析性质, 而上调和函数则不然, 甚至连续性也不能保证. 但它却可被很好的函数列所逼近: 设

$f(x)$ 在开集 D 内为上调和, D_m 为相对紧开集列, $D_m \uparrow D$, 则存在有界、无穷次可微、在 D_m 为上调和的函数 f_m , 使在 D_m 内, $f \geq f_m$ ($r > m$), 而且在 D 内有 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$; 如 $f \geq 0$, 则也可取 $f_m \geq 0$.

上调和函数与极集有下列关系: 设 f 在开集 D 内上调和, 则 $(x \in D: f(x) = \infty)$ 的每一紧子集是极集; 反之, 设 D 开, $B \subset D$, B 为极集, 又 $x \in D \setminus B$, 则存在于 D 内为上调和的函数 f , 使在 B 上 $f = \infty$, 又 $f(x) < \infty$. (因使 $f(x) = \infty$ 之点 x 通常称为 f 的极点, 这也许是极集命名的原因).

称定义在开集 D 内的非负函数 f 为在 D 内过份, 如果它在 D 之任一连通成分内不恒等于 ∞ , 而且

$$E_x(f(x_t), t < c_D) \leq f(x), \quad (\text{任意 } t > 0);$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} E(f(x_t), t < c_D) = f(x) \quad (c_D \text{ 为 } D \text{ 的首出时}).$$

可以证明: 设 $f \geq 0$, D 为开集, 则 f 上调和于 D 的充要条件是它在 D 内过份.

此结果把上调和函数与布朗运动联系起来.

(二) 函数 $g_B(x, y)$ 的性质: 对 $B \in \mathcal{B}^n$, ($n \geq 3$), 在 § 6 中定义了

$$g_B(x, y) = \int_0^\infty q_B(t, x, y) dt, \quad (7)$$

其中 $q_B(t, x, y)$ 为禁止转移密度. 直观上, $g_B(x, y) dy$ 可理解为自 x 出发在到达 B 之前在 $(y, y + dy)$ 中的平均停留时间. 由 § 6(14)

$$\begin{aligned} g(y - x) &= \int_B H_B(x, dz) g(y - z) + g_B(x, y) \\ &= E_x g(y - x(h_B)) + g_B(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

上面已叙及 $g(y - x)$ 有关调和的性质, 故为研究 $g_B(x, y)$, 只需先研究

$$F_B(x, y) = \int_B H_B(x, dz) g(y - z) = E_x g(y - x(t_B)). \quad (9)$$

以 $F(x, \cdot)$ 表 $F(x, y)$ 中, x 固定, y 流动.

引理 1. $F_B(x, \cdot)$ 在 R^n 为上调和, 在 $(\bar{B})^c$ 调和.

证. 由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow a} F_B(x, y) &= \lim_{y \rightarrow a} \int_B H_B(x, dz) g(y - z) \\ &\geq \int_B H_B(x, dz) \lim_{y \rightarrow a} g(y - z) \\ &\geq \int_B H_B(x, dz) g(a - z) = F_B(x, a). \end{aligned} \quad (10)$$

故 $F_B(x, \cdot)$ 下连续. 次对 $a \in R^n$ 及球 $B_r(a)$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{S_r(a)} F_B(x, z) U_r(dz) \\ &= \int_{S_r(a)} \int_B H_B(x, dv) g(z - v) U_r(dz) \\ &= \int_B H_B(x, dv) \int_{S_r(a)} g(z - v) U_r(dz) \\ &\leq \int_B H_B(x, dv) g(a - v) = F_B(x, a). \end{aligned} \quad (11)$$

此得证第一结论. 下证在 $(\bar{B})^c$ 之调和性.

先证在 $a \in \bar{B}$, $F_B(x, \cdot)$ 有球面平均性. 取 $S_r(a) \subset (\bar{B})^c$, 推理如 (11), 但 (11) 中不等号应为等号, 此因 $g(\cdot - v)$ 在 $R^n \setminus \{v\}$ 为调和, 而 $v \in \bar{B}$, 故它在 $(\bar{B})^c$ 调和. 再证 $F_B(x, \cdot)$ 的局部可积性. 由于 \bar{B} 闭, 当 $z \in \bar{B}$ 而 y 属于紧集 $K \subset (\bar{B})^c$ 时, $g(y - z)$ 对 z 有界; 由 (9) $F_B(x, y)$ 对 $y \in K$ 也有界, 从而它在 $(\bar{B})^c$ 局部可积. 于是由 § 4 定理 2, $F(x, \cdot)$ 在 $(\bar{B})^c$ 调和.

引理 2. 设 G_m 及 G 皆开, 又

$$G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_m G_m = G. \quad (12)$$

则对 $x \in G, y \in G$, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_{G_m^c}(x, y) = F_{G^c}(x, y). \quad (13)$$

证. 当 m 充分大时, $x \in G_m, y \in G_m$,

$$\begin{aligned} F_{G_m^c}(x, y) &= E_x g(y - x(h_{G_m^c})) - E_x g(y - x(h_{\partial G_m})) \\ &= E_x[g(y - x(h_{\partial G_m})); h_{\partial G} < \infty] \\ &\quad + E_x[g(y - x(h_{\partial G_m}); h_{\partial G} = \infty]. \end{aligned} \quad (14)$$

注意 $x(h_{\partial G_m}) \in G_m^c$; 当 $y \in G_m$ 固定时, $g(y - z)$ 对 $z \in G_m^c$ 有界连续; 又在 $h_{\partial G} < \infty$ 上, 由 § 6 引理 2, 对 $x \in G, P_x$ 几乎处处有 $x(h_{\partial G_m}) \rightarrow x(h_{\partial G})$. 由于这些原因, (14) 中最右方的第一项趋于

$$\begin{aligned} E_x[g(y - x(h_{\partial G})); h_{\partial G} < \infty] \\ = E_x[g(y - x(h_{G^c})); h_{G^c} < \infty] = F_{G^c}(x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

在 $h_{\partial G} = \infty$ 上, $P_x(x \in G)$ 几乎处处有 $h_{\partial G_m} \uparrow \infty$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x(h_{\partial G_m})| = \infty;$$

再注意 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(y - x) = 0$, 并利用控制收敛定理, 知右方第二项趋于 0.

关于 $g_B(x, y)$ 的性质, 在 § 6 中已有叙述, 今再补充如下:

(i) $g_B(x, y) < \infty, (x \neq y); g_B(x, x) = \infty, x \in \bar{B}$.

事实上, 由 $q_B(t, x, y) \leq p(t, x, y)$ 得

$$g_B(x, y) \leq g(x, y) < \infty \quad (x \neq y).$$

次如 $x \in \bar{B}$, 由 (8)

$$g_B(x, x) = g(0) - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) g(x - z),$$

$g(0) = \infty$; 又当 $x \in \bar{B}$ 时, $g(x - z)$ 对 $z \in \bar{B}$ 有界连续, 故上式中积分有穷, 于是 $g_B(x, x) = \infty$.

由 (8) 及引理 1, 立得

- (ii) $g_B(x, \cdot)$ 上连续, 在 $R^n \setminus \{x\}$ 为下调和.
- (iii) $g_B(x, y)$ 对 $y \in (\bar{B})^c - \{x\}$ 调和.
- (iv) $g_B(x, y) - g(y - x)$ 对 $y \in (\bar{B})^c$ 调和.
- (v) 如 $a \in B^c$, $\lim_{y \rightarrow a} g_B(x, y) - g_B(x, a) = 0$.

事实上, 由 (ii) 及 § 6, 7)

$$0 \leq \overline{\lim_{y \rightarrow a}} g_B(x, y) \leq g_B(x, a) = 0.$$

(三) 格林函数. 设 G 为非空开集, 定义在 $G \times G$ 上的非负函数 $g_G^*(x, y)$ 称为 G 的格林函数, 如果

- 1) $g_G^*(x, y) - g(y - x)$ 对 y 在 G 内调和;
- 2) 若另一 $u(x, y) \geq 0 (x \in G, y \in G)$ 也使 $u(x, y) - g(y - x)$ 对 y 在 G 内调和, 则

$$u(x, y) \geq g_G^*(x, y). \quad (16)$$

下定理是布朗运动与势论间的一重要联系.

定理 1. 开集 G 的格林函数 g_G^* 等于 g_G^c 在 $G \times G$ 上的限制, 即

$$g_G^*(x, y) = g_G^c(x, y) \quad (x \in G, y \in G). \quad (17)$$

证. 1° 由性质 (iv) 立得证 $g_G^c(x, y)$ 满足 1).

2° 任取一个满足 2) 中条件的 $u(x, y)$, 往证

$$u(x, y) \geq g_G^c(x, y) \quad (x \in G, y \in G). \quad (18)$$

先设 G 有界而且 $\partial G \subset (G^c)^r$. 由 (v), 对 $a \in \partial G$

$$\lim_{y \rightarrow a} [u(x, y) - g_G^c(x, y)] = \lim_{y \rightarrow a} u(y, y) \geq 0.$$

由 (iv), 既然

$$\begin{aligned} u(x, y) - g_G^c(x, y) &= [u(x, y) - g(y - x)] \\ &\quad - [g_G^c(x, y) - g(y - x)] \end{aligned}$$

对 $y \in G$ 调和, 故由 § 4 极大原理, 即得 (18).

3° 设 G 为任意开集. 由 § 6 引理 2, 存在有界开集列

$\{G_m\}$, 使

$$G_m \subset G, G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \cdots, \bigcup_m G_m = G,$$

而且 $\partial G_m \subset (G_m^c)^r$. 由于 G_m 有界, 由 2° 有

$$u(x, y) \geq g_{G_m^c}^c(x, y) \quad (x \in G_m, y \in G_m). \quad (19)$$

因此, 如能证 $g_{G_m^c}^c(x, y) \rightarrow g_{G^c}^c(x, y)$, $(x \in G, y \in G)$, 则 (18) 成立而定理证完.

为此, 先设 $x = y \in G$. 对充分大的 m , $x = y \in G_m$. 由 (i)

$$\infty = g_{G_m^c}^c(x, x) \uparrow g_{G^c}^c(x, x) = \infty.$$

次设 $x \in G, y \in G, x \neq y$. 对充分大的 $m, y \in G_m$. 由 (8)

$$\begin{aligned} g_{G_m^c}^c(x, y) &= g(y - x) - F_{G_m^c}^c(x, y), \\ g_{G^c}^c(x, y) &= g(y - x) - F_{G^c}^c(x, y). \end{aligned}$$

由此及引理 2 即得所欲证.

作为用概率方法求格林函数之例, 考虑开球 $G = \bar{B}_r$, 试证它的格林函数为

$$\begin{aligned} g_G^*(x, y) &= g(y - x) - \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^* - x), \\ &\quad (n \geq 3), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $x \in G, 0 \neq y \in G$, 又 y^* 由 y 经 Kelvin 变换 (相对于圆周 S_r 的反演) 而来, 即

$$y^* = r^2 y / |y|^2 \quad (y \neq 0). \quad (21)$$

实际上, 由定理 1 及 (8)

$$g_G^*(x, y) = g(y - x) - E_x g(y - x(h_G^c)). \quad (22)$$

设 $z = x(h_G^c) \in S_r$. 利用关系式: $z \in S_r$, 有

$$|z - y^*| / |z - y| = r / |y|, \quad (y \neq 0),$$

得

$$g(y-z) = \frac{c_n}{|y-z|^{n-2}} = \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^*-z).$$

由于 $g(y^*-x)$ 对 $x \in R^n - \{y^*\}$ 调和, 由 § 4(5)

$$\begin{aligned} E_x g(y-x(h_G^c)) &= \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} E_x g(y^*-x(h_G^c)) \\ &= \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^*-x). \end{aligned}$$

由此及(22)即得(20).

同理可证 $G = (B_r)^c$ 的格林函数也由(20)给出.

第二章 二维布朗运动与对数位势

§ 14. 对数位势的基本公式

(一) 对于一、二维布朗运动, $g(x, y) = \infty$ (见 § 2, (8)), 故需考虑另一势核 $k(x, y)$; 结果发现, $k(x, y)$ 是对数函数, 由它而建立对数位势. 对数势与牛顿势的理论在许多问题上平行的.

本章中无特别声明时, 恒设 $n = 2$. 仍令

$$g^\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x) dt, \quad p(t, x) = \frac{1}{2\pi t} e^{-|x|^2/2t}.$$

任意固定一点 $u \in R^2$, 使 $|u| = 1$. (例如, 可取 $u = (1, 0)$). 对任意 $x \in R^2$, $y \in R^2$, 定义

$$k^\lambda(x) = g^\lambda(u) - g^\lambda(x); \quad k^\lambda(x, y) = k^\lambda(y - x). \quad (1)$$

显见 $k^\lambda(x, y) = k^\lambda(y, x)$, 又

$$\begin{aligned} k^\lambda(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} [p(t, u) - p(t, x)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{-1/2t} - e^{-|x|^2/2t}) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由此知

$$k^\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{如 } |x| = 1; \\ > 0, & \text{如 } |x| > 1, \text{ 此时 } k^\lambda(x) \text{ 随 } \lambda \downarrow 0 \text{ 而上升;} \\ < 0, & \text{如 } |x| < 1, \text{ 此时 } k^\lambda(x) \text{ 随 } \lambda \downarrow 0 \text{ 而下降.} \end{cases} \quad (3)$$

于是存在极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} k^\lambda(x) = k(x), \quad (4)$$

这收敛性具有下列性质:

1) 单调性: 当 $\lambda \downarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} k^\lambda(x) &\uparrow k(x), \text{ 如 } |x| \geq 1; \\ -k^\lambda(x) &\uparrow -k(x), \text{ 如 } |x| \leq 1. \end{aligned}$$

2) $k^\lambda(x)$ 及 $k(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续(这由下面 $k(x)$ 的表达式可见), 故在不含 0 的紧集上, 收敛是均匀的.

现在来求 $k(x)$, 交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e^{-1/2t} - e^{-|x|^2/2t}) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-|x|^2 t}) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\int_t^\infty e^{-s} ds \right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{[t, |x|^2 t]}(s) \frac{ds}{s} \right) e^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\int_{s/|x|^2}^s \frac{dt}{t} \right] e^{-s} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

故

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \log |x|, \quad (x \in R^2), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} k^\lambda(x, y) = \frac{1}{\pi} \log |x - y|, \\ &\quad (x, y \in R^2). \end{aligned} \quad (7)$$

称 $k(x, y)$ ($= k(y - x) = k(x - y)$) 为对数势的核.

对 $B \in \mathcal{B}^2$, 由 § 6, (6)

$$E_x e^{-\lambda h_B} = H_B^\lambda(x, \bar{B}), \quad (8)$$

$$g^\lambda(u) = \int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(u) + g^\lambda(u) [1 - E_x e^{-\lambda h_B}]. \quad (9)$$

又首次通过公式的拉氏变换为

$$g^\lambda(y-x) = \int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y-z) + g_B^\lambda(x, y). \quad (10)$$

自(10)减去(9),得

$$\begin{aligned} k^\lambda(y-x) &= \int_B H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y-z) \\ &\quad - g_B^\lambda(x, y) + L_B^\lambda(x), \quad (x, y \in R^2), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$L_B^\lambda(x) = g^\lambda(u) [1 - E_x e^{-\lambda h_B}]. \quad (12)$$

显然, $L_B^\lambda(x) \geq 0$, 而且当 $x \in B^c$ 时, $L_B^\lambda(x) = 0$. 本节的主要目的是证明: 如 B 非极集, 则可在(11)中令 $\lambda \downarrow 0$ 而得下列(13)式, 称它为对数势的基本公式.

定理 1. 设 B 为非极集. 则

- i) $g_B(x, y) < \infty$, $(x \neq y)$;
- ii) 存在极限 $\lim_{\lambda \downarrow 0} L_B^\lambda(x) = L_B(x) < \infty$, $(x \in R^2)$;
- iii) 对 $x \neq y$, 有

$$\begin{aligned} k(y-x) &= \int_B H_B(x, dz) k(y-z) - g_B(x, y) \\ &\quad + L_B(x). \end{aligned} \quad (13)$$

为了证明, 须先证若干引理. 我们先作一些说明. 要在积分号下取极限, 可以用单调收敛定理或被积函数列在紧集上的均匀收敛性. 因此, 我们先对相对紧集证明定理 1, 然后考虑一般的 B . 对 $A \in \mathscr{B}^n$, 令

$$g_B^\lambda(x, A) = \int_A g_B^\lambda(x, y) dy, \quad (\lambda \geq 0). \quad (14)$$

引理 1. 设 $B \in \mathcal{B}^n$ ($n \geq 1$) 为非极集, 又 A 为相对紧集, 则

$$g_B^1(x, A) \uparrow g_B(x, A) = E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t) dt, \quad (\lambda \downarrow 0); \quad (15)$$

$$\sup_{x \in R^n} E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t) dt < \infty. \quad (16)$$

证. 由单调收敛定理及

$$\begin{aligned} g_B^1(x, A) &= \int_A \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t, x, y) dt dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B > t, x_t \in A) dt, \end{aligned}$$

即得(15)中前式. 又

$$\begin{aligned} g_B(x, A) &= \int_0^\infty P_x(h_B > t, x_t \in A) dt \\ &= E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t) dt. \end{aligned}$$

设 $n \geq 3$. 取球 $B_r \supset A$. 由 § 1 引理 2, 知

$$\begin{aligned} g_B(x, A) &\leq \int_0^\infty P_x(x_t \in A) dt \leq \int_0^\infty \int_{B_r} p(t, x, y) dy dt \\ &= \int_{B_r} \frac{c_n}{|x - y|^{n-2}} dy < A_n, \end{aligned}$$

其中 c_n, A_n 为常数, 故此时(16)成立.

今设 $n \leq 2$. 任取 $a \in R^2$, 必存在 $t_0 > 1$ 使

$$\begin{aligned} P_a(x_t \in B, \text{ 对某 } s \in (1, t_0)) \\ = \int p(1, y - a) P_y(h_B \leq t_0 - 1) dy > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\int = \int_{R^2}$. 否则, 如说上式对一切 $t_0 > 1$ 都为 0, 则

$$P_a(h_B < \infty) = \int p(1, y - a) P_y(h_B < \infty) dy$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int P(1, y - a) P_y(h_B \leq t - 1) dy = 0.$$

故由 § 6 系 1 知 $P_x(h_B < \infty) = 0$, 此与 B 非极集矛盾.

由(17), 存在紧集 F , 有正勒贝格测度, 使

$$P_y(h_B \leq t_0 - 1) > 0, \quad (y \in F). \quad (18)$$

因 $p(1, x)$ 连续而且严格大于 0, 故 $p(1, y - x)$ 对 $y \in F$, $x \in A$ 的下确界大于 0. 于是由(18),

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} P_x(h_B \leq t_0) &\geq \inf_{x \in A} \int_F p(1, y - x) P_y(h_B \leq t_0 - 1) dy \\ &= \delta > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 δ 为某正数. 令

$$C = \{t: x_t \in A, h_B > t\}, \quad I_j = [jt_0, (j+1)t_0].$$

定义下标集 $D = \{j: I_j \cap C \text{ 非空}\}$. 故如 $j' \in D$, 则必存在 $t \in [j't_0, (j'+1)t_0]$, $t < h_B$, 使 $x_t \in A$. 把 D 排为 $j_1 < j_2 < \dots$. 定义时刻 $T_1 < T_2 < \dots$:

$$T_1 = \inf\{t: t \in C\}, \text{ 如右方集非空, 否则令 } T_1 = \infty;$$

$$T_{n+1} = \inf\{t: t \in C; t \geq j_n t_0\}, \text{ 如右方集非空, 否则令 } T_{n+1} = \infty.$$

由定义知, 如 $T_{n+1} < \infty$, 则 T_{n+1} 是 $[j_n t_0, h_B]$ 中首中 A 的时刻. 以 $N(\leq \infty)$ 表 D 中元的个数. 则

$$P_x(n < N \leq n+2) = P_x(T_n < \infty, T_{n+1} = \infty)$$

$$\geq P_x(T_n < \infty, h_B \leq T_n + t_0)$$

$$= \int_A P_x(T_n < \infty, X(T_n) \in dz) P_x(h_B \leq t_0)$$

$$\geq \delta P_x(T_n < \infty) = \delta P_x(N > n);$$

$$P_x(N > n+2) \leq (1 - \delta) P_x(N > n);$$

$$E_x N = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > 2n)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P_x(N \geq 2n+1) < \frac{2}{\delta} < \infty.$$

以 $|C|$ 表 C 的勒贝格测度, 得

$$\begin{aligned} \sup_x E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t) dt &= \sup_x E_x |C| \\ &\leq \sup_x E_x \left| \bigcup_{i \in D} I_i \right| = \sup_x t_0 E_x N < \infty_{\#} \end{aligned}$$

注 1. 由 § 6 (二), 当 $n=1$ 时, 引理 1 对任意非空的 $B \in \mathscr{B}^1$ 正确.

引理 2. 设二可测集 $C \subset B$, 则

$$g_C(x, y) \geq g_B(x, y), \quad (x, y \in R^2). \quad (20)$$

证 $h_C \geq h_B$, 故对任意 $A \in \mathscr{B}^2$, 有

$$P_x(h_C > t, x_t \in A) = P_x(h_B > t, x_t \in A).$$

因而

$$\begin{aligned} q_C(t, x, y) &\geq q_B(t, x, y), \quad (\text{a. e. } y), \quad (21) \\ \int q_C(t - \varepsilon, x, z) p(\varepsilon, y - z) dz \\ &\geq \int q_B(t - \varepsilon, x, z) p(\varepsilon, y - z) dz. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 即得知 (21) 对一切 y 成立. 将 (21) 两边对 t 自 0 至 ∞ 积分即得 (20)_#

引理 3. 设 $B \in \mathscr{B}^2$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_B H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y - z) \\ = \int_B H_B(x, dz) k(y - z). \end{aligned} \quad (22)$$

证. 若 B 为极集, 则 $H_B^\lambda(x, A) = H_B(x, A) = 0 (A \in \mathscr{B}^2)$ 而不须证. 设 B 为非极集. 令 $D = (z: |y - z| \leq 1)$, 则

$$\int_B H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y - z)$$

$$\begin{aligned}
&= E_x e^{-\lambda h_B} k^\lambda(y - x(h_B)) \chi_{D^c}(x(h_B)) \\
&\quad - E_x e^{-\lambda h_B} [-k^\lambda(y - x(h_B)) \chi_D(x(h_B))] \\
&= (I) - (II), (\text{设})
\end{aligned}$$

当 $\lambda \downarrow 0$ 时, 由上述单调收敛性, (I), (II) 分别收敛于对应于 $\lambda = 0$ 的类似式 ($k^0(y) = k(y)$), 故得证(22)。

注 2. 如 B 为相对紧集, 则

$$-\infty < \int_B H_B(x, dz) k(y - z) < \infty. \quad (23)$$

(以下简记 $\int_F H_B(x, dz) k(y - z)$ 为 \int_F).

实际上, 因 $k(y - z)$ 对 $z \in \bar{B} \cap D^c$ 有界, 故 $\int_{B \cap D^c}$ 有限; 其次, 当 $\lambda \downarrow 0$ 时, $(II) \uparrow - \int_{B \cap D} \leq \infty$, 而 $(II) > -\infty$, 故 $-\infty \leq \int_{B \cap D} < \infty$. 于是 $-\infty \leq \int_B < \infty$; 又由下面引理 4 之证, “ $-\infty \leq$ ” 可改为 “ $-\infty <$ ”.

引理 4. 设 B 为相对紧集, 非极集, 则定理 1 成立.

证. 取紧集 A , 使 $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 而且有正勒贝格测度 $|A|$. 将(11)二方对 $y \in A$ 积分, 得

$$\begin{aligned}
|A| L_B^\lambda(x) &= \int_A k^\lambda(y - x) dy \\
&\quad - \int_B H_B^\lambda(x, dz) \int_A k^\lambda(y - z) dz + g_B^\lambda(x, A). \quad (24)
\end{aligned}$$

令 $\lambda \downarrow 0$ 而分别考虑各项. 由引理 1,

$$g_B^\lambda(x, A) \uparrow g_B(x, A) < \infty. \quad (25)$$

又由

$$\int_A k^\lambda(y - x) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda r}$$

$$\cdot \left[\int_A (e^{-1/2t} - e^{-|y-x|^2/2t}) dy \right] \frac{dt}{t} \quad (26)$$

及对 $\int_A k(y-x)dy$ 之类似展式, 可见

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_A k^\lambda(y-x)dy = \int_A k(y-x)dy. \quad (27)$$

在紧集上均匀成立. 因 \bar{B} 紧, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) \int_A k^\lambda(y-z)dy \\ = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) \int_A k(y-z)dy. \end{aligned} \quad (28)$$

由(25), (27), (28)知(24)右方有有限极限, 故存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} L_B^\lambda(x) = L_B(x). \quad (29)$$

再由(11), 对 $x \neq y$, 知存在有限极限

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow 0} \left[-g_B^\lambda(x, y) + \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y-z) \right] \\ = k(y-x) - L_B(x). \end{aligned} \quad (30)$$

今 $0 \leq g_B^\lambda(x, y) \uparrow g_B(x, y) \leq \infty$, 而由(22), (23)

$$\begin{aligned} -\infty \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y-z) \\ = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) < \infty. \end{aligned}$$

故对 $x \neq y$ 必有

$$g_B(x, y) < \infty; \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) > -\infty$$

以及(13)成立.

定理 1 之证. 因 B 非极集, 必有相对紧子集 $A \subset B$ 而且 A 也非极集. 由引理 2 及引理 4,

$$g_B(x, y) \leq g_A(x, y) < \infty, \quad (x \neq y). \quad (31)$$

$$L_B^\lambda(x) = g^\lambda(u) [1 - E_x e^{-\lambda h_B}]$$

$$\leq g^{\lambda}(u)[1 - E_x e^{-\lambda h_A}] = L_A^{\lambda}(x),$$

$$0 \leq \overline{\lim_{\lambda \downarrow 0}} L_B^{\lambda}(x) \leq L_A(x) < \infty, \quad (32)$$

由(11), 对 $x \neq y$, 存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left[\int_B H_B^{\lambda}(x, dz) k^{\lambda}(y - z) + L_B^{\lambda}(x) \right]$$

$$= k(y - x) + g_B(x, y).$$

由此及(32), (22), 必存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_B H_B^{\lambda}(x, dz) k^{\lambda}(y - z)$$

$$= \int_B H_B(x, dz) k(y - z). \quad (33)$$

因而也必存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} L_B^{\lambda}(x) = L_B(x), \quad (x \in R^2), \quad (34)$$

并且(13)成立。

注3. 若 $E_x h_B < \infty$, ($x \in R^2$), 则有

$$L_B(x) = 0. \quad (35)$$

实际上,

$$L_B^{\lambda}(x) = \lambda g^{\lambda}(u) E_x \left(\frac{1 - e^{-\lambda h_B}}{\lambda} \right). \quad (36)$$

当 $\lambda > 0$ 充分小时, 括号中函数被 h_B 所控制, 故当 $\lambda \downarrow 0$ 时

$$E_x \left(\frac{1 - e^{-\lambda h_B}}{\lambda} \right) \rightarrow E_x h_B < \infty; \quad \lambda g^{\lambda}(u) \rightarrow 0.$$

故 $L_B(x) = 0$. 特别, 如 B^c 为相对紧集, 则由 § 3 系 1, 有 $E_x h_B < \infty$ ($x \in R^2$). 其次, 由(36)知

$$L_B^{\lambda}(x) = 0, \quad L_B(x) = 0, \quad (\text{如 } x \in B^c). \quad (37)$$

第三, 如 B 紧, 又 $x \in B$, 则由(36)知 $L_B^{\lambda}(x) = L_{\partial B}^{\lambda}(x)$, 故此时

$$L_B(x) = L_{\partial B}(x). \quad (38)$$

注 4. 如 $B \in \mathscr{B}^2$ 为极集, 因而 $P_x(h_B = \infty) \equiv 1$. 由 (36), 令 $\lambda \downarrow 0$, 自然应定义 $L_B(x) \equiv \infty$.

§ 15. 平面 Green 函数

(一) 利用 § 14 定理 1, 容易讨论 $g_B(x, y)$ 的一些性质, 其中 $B \in \mathscr{B}^2$ 为非极集. 由 § 14(13)

$$g_B(x, y) = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y - z) - k(y - x) + L_B(x), \quad (1)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{\pi} \log |x - y|. \quad (2)$$

由 § 4 例 1, $k(x, y)$ 对 y 在 $R^2 - \{x\}$ 中调和, 在 R^2 内下调和. 令

$$F_B(x, y) = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y - z) - E_x k(y - x(h_B)). \quad (3)$$

引理 1. 函数 $F_B(x, \cdot)$ 在 R^2 为下调和, 在 $(\bar{B})^c$ 调和. 此引理的证全同于 § 13 引理 1 之证, 因为 $k(y - z)$ 具有那里对 $g(y - z)$ 所需的相应性质.

定理 1. 设 $B \in \mathscr{B}^2$ 非极集, 则

- (i) $0 \leq g_B(x, y) < \infty$, $(x \neq y)$.
- (ii) $g_B(x, y)$ 对 $y \in R^2 - \{x\}$ 上连续、下调和.
- (iii) $g_B(x, y)$ 对 $y \in (\bar{B})^c - \{x\}$ 调和.
- (iv) $g_B(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in (\bar{B})^c$ 调和.
- (v) $\lim_{y \rightarrow a} g_B(x, y) = g_B(x, a) = 0$, 如 $a \in B^r$.

证. 由 § 14 定理 1 得 (i). 对 $y \in R^2 - \{x\}$, $k(x, y)$ 调和, 而 $F_B(x, y)$ 下调和, 故由 (1) 得 (ii). 同样证明 (iii)

(iv), (v) 之证同 § 13(v) 之证。

(二) 称开集 G 为 Green 集, 如存在 $G \times G$ 上之函数 $h(x, y)$ 使 $h(x, y) + h(y - x)$ 对 $y \in G$ 调和. 此时说函数 $h(x, y)$ 具有性质 $H(G)$. 如 G 为 Green 集, 具有性质 $H(G)$ 的最小函数称为 G 的 Green 函数.

在 § 13 中已知当 $n \geq 3$ 时, 任一开集有 Green 函数; 而且限制在 $G \times G$ 上的 g_{G^c} 是它的 Green 函数. 下定理表示, 对 $n = 2$, 只当 G^c 相当“大”(或 G 相当“小”)时, G 才是 Green 集.

定理 2. 开集 G 为 Green 集的充要条件是 G^c 为非极集. 这时限制在 $G \times G$ 上的函数 g_{G^c} 是 G 的 Green 函数.

证. 充分性: 由定理 1(iv), $g_{G^c}(x, y) + h(y - x)$ 对 $y \in G^c$ 调和, 故只要证 g_{G^c} 是具有性质 $H(G)$ 的最小函数.

先考虑 G 有界、并且每点 $x \in \partial G$ 对 G^c 规则的情形. 设 h 为任一具 $H(G)$ 的函数, 由定理 1(v)

$$\lim_{y \rightarrow a} [h(x, y) - g_{G^c}(x, y)] = \lim_{y \rightarrow a} g(x, y) \geq 0,$$

$$a \in \partial G \subset (G^c)^r,$$

故由 § 4 极小原理, $h(x, y) \geq g_{G^c}(x, y) \geq 0, y \in G$.

今考虑任意开集 G . 由 § 6 引理 2, 存在有界开集列 $\{G_n\}$, 使

$$G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_n G_n = G;$$

又 ∂G_n 之点对 G_n^c 规则, 而且 $P_x(h_{\partial G_n} \uparrow h_{\partial G}) = 1, (x \in G)$.

由 § 14 引理 2, 存在极限 $g^*(x, y)$:

$$g_{G_n^c}(x, y) \uparrow g^*(x, y) \leq g_{G^c}(x, y), \quad (4)$$

因 G^c 非极集, $g^*(x, y) \leq g_{G^c}(x, y) < \infty, (x \neq y)$. 下证

$$g^*(x, y) = g_{G^c}(x, y). \quad (5)$$

任取可测函数 $f \geq 0$. 对 $x \in G$, $P_x(h_{G_n^c} = h_{\partial G_n}) = 1$, $P_x(h_{G^c} = h_{\partial G}) = 1$, (n 充分大), 故 $P_x(h_{G_n^c} \uparrow h_{G^c}) = 1$, 而有

$$\begin{aligned} E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t) dt &\uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t) dt \\ &= \int_{R^2} g_{G^c}(x, y) f(y) dy; \end{aligned}$$

另一方面, 由单调收敛定理

$$\begin{aligned} E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t) dt &= \int_{R^2} g_{G_n^c}(x, y) f(y) dy \uparrow \\ &\cdot \int_{R^2} g^*(x, y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (6)$$

比较此二式即知(5)对 a. e. y 成立. 下证(5)对一切 y 也成立.

根据定理 1(iv), $g_{G_n^c}(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G_n$ 调和; 又 $g_{G_n^c}(x, y) \uparrow g^*(x, y)$, $g^*(x, y) < \infty$, ($x \neq y$). 故由 Harnack 定理, $g^*(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G$ 调和, 因而连续. 另一方面, 定理 1(iv) 表明 $g_{G^c}(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G$ 也调和、连续, 故由(5)式几乎处处成立即得其对一切 $(x, y) \in G \times G$ 成立. 下面利用此结果以证 g_{G^c} 的最小性.

任取具有性质 $H(G)$ 的函数 $h(x, y)$, $(x, y) \in G \times G$. 因在 G_n 上, h 也有性质 $H(G_n)$, 故由上面对有界开集之证明, 知

$$g_{G_n^c}(x, y) \leq h(x, y), \quad (x, y) \in G_n \times G_n.$$

由(5), 对 $(x, y) \in G \times G$, 有

$$g_{G^c}(x, y) = g^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{G_n^c}(x, y) \leq h(x, y).$$

必要性: 即要证如 G^c 为极集, 则 G 非 Green 集. 否则, 如说 G 为 Green 集, 则如上所述, 对任一具性质 $H(G)$ 的函数 $h(x, y)$, 有

$$g^*(x, y) \leq h(x, y) < \infty, \quad x \neq y. \quad (7)$$

任取不恒为 0、非负的连续函数 $f(x)$ 。因 G^c 为极集，由二维布朗运动的常返性可见

$$\begin{aligned} E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t) dt &\uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t) dt \\ &= E_x \int_0^\infty f(x_t) dt = \infty, \end{aligned}$$

由此与(6)得

$$\int_{R^2} g^*(x, y) f(y) dy = \infty.$$

即然 $f(x)$ 任意， $g^*(x, y) = \infty$ ，a. e. y 。此与(7)矛盾。

§ 16. 对数势

(一) 设 μ 为有界测度，有紧支集为 C 。函数

$$\begin{aligned} K\mu(x) &= - \int_C k(y-x) \mu(dy) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \log \frac{1}{|y-x|} \mu(dy) \end{aligned} \quad (1)$$

称为 μ 的势。

由 § 4 例 1 知， $-k(y-x)$ 作为 y 的函数，在 $R^2 - \{x\}$ 调和，在 R^2 为上调和，故仿照 § 13 引理 1 之证，知 $K\mu(x)$ 在 R^2 为上调和，在 C^c 为调和。

设 B 为任一相对紧集，但非极集，自 z 出发，其首中点分布记为

$$H_B(z, dy) = P_z(x(h_B) \in dy). \quad (2)$$

令 $B_r = \{x: |x| \leq r\}$ ， $S_r = \{x: |x| = r\}$ ， $r > 0$ 。取 r 充分大，使 $\bar{B}_r \supset B$ 。以 U_r 表 S_r 上的均匀分布，定义测度 μ_B ：

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} H_B(z, dy) U_r(dz). \quad (3)$$

由轨道的连续性及(3)可知,如 B 紧,则 $\mu_B = \mu_{\partial B}$.

定理 1. 设 B 为相对紧集,非极集,则

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} g_B(x, y) = L_B(x), \quad (4)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_B(x, y) = L_B(y). \quad (5)$$

又在强收敛意义下,有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} H_B(x, dy) = \mu_B(dy). \quad (6)$$

证. 在任意紧集上,对 x 均匀地有

$$k(y-x) - k(y) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{y-x}{y} \right| \rightarrow 0, \\ (|y| \rightarrow \infty). \quad (7)$$

由 § 14 定理 1, 对 $x \neq y$ 有

$$k(y-x) - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) = -g_B(x, y) \\ + L_B(x). \quad (8)$$

左方对任意紧集中的 x , 均匀地有

$$[k(y-x) - k(y)] - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) [k(y-z) - k(y)] \\ \rightarrow 0, \quad (|y| \rightarrow \infty).$$

故左边同样地也趋于 0 而得证 (4). 由对称性 $g_B(x, y) = g_B(y, x)$ 得 (5).

由 § 5(18),

$$H_{S_r}(x, dy) = \frac{|x|^2 - r^2}{|y-x|^2} U_r(dy) \quad (x \in S_r). \quad (9)$$

仿 § 8 引理 1 之证, 知在测度的强收敛下有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} H_{S_r}(x, dy) = U_r(dy). \quad (10)$$



由强马氏性及(3), 对 $x \in B_r$, 有

$$\begin{aligned} & |H_B(x, A) - \mu_B(A)| \\ &= \left| \int_{S_r} H_{S_r}(x, dy) H_B(y, A) - \int_{S_r} U_r(dy) H_B(y, A) \right| \\ &\leq \int_{S_r} |H_{S_r}(x, dy) - U_r(dy)|. \end{aligned} \quad (11)$$

对一切 $A \in \mathcal{B}^2$ 成立, 故由(10)知(6)在强收敛意义下正确_#.

直观地, (10)式可理解为自 ∞ 出发, 首中 S_r (或 B_r) 的点的分布为均匀分布, 这与自 0 出发, S_r (或 B_r^c) 的首中点的分布相同. 而(6)则表示: 自 ∞ 出发, B 的首中点的分布为 μ_B (比较 § 8(7)). 又(4)可理解为: 自 x 出发, 在首中 B 以前, 在“ ∞ 远的单位面积的邻域”中的平均停留时间约为 $L_B(x)$, 对(5)也可作类似的解释: 自 ∞ 出发, 在首中 B 以前, 在 y 的单位面积的邻域中的平均停留时间约为 $L_B(y)$.

以后还会看到, 在位势论中, 应把 μ_B 看成 B 的平衡分布.

定理 2. 设 B 为相对紧集, 则存在有限极限

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [L_B(x) - k(x)] = R(B), \quad (12)$$

而且 μ_B 的势 $K\mu_B$ 满足

$$K\mu_B(x) = R(B) - L_B(x). \quad (13)$$

证. 由 § 14 定理 1

$$\begin{aligned} k(y-x) - k(x) &= \int_B H_B(x, dz) k(y-z) \\ &+ g_B(x, y) = L_B(x) - K(x). \end{aligned} \quad (14)$$

右方与 y 无关. 如 \bar{B} 紧, $y \in \bar{B}$, 则 $k(y-z)$ 对 $z \in \bar{B}$ 有界. 故由定理 1

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) \\ &= \int_{\bar{B}} \mu_B(dz) k(y-z) = K\mu_B(y). \end{aligned}$$



令 $|x| \rightarrow \infty$, 由此式及(5), 得知(14)左方趋于 $K\mu_B(y) + L_B(y)$. 因此, (14)右方也有有限极限, 记为 $R(B)$, 即得(12). 并且

$$K\mu_B(y) + L_B(y) = R(B), \quad (y \in B).$$

这得证(13)对 $x \in \bar{B}$ 成立. 下证它对 $x \in \bar{B}$ 也成立.

取 $y \in \bar{B}$. 由(14)及(12)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_B H_B(x, dz) k(y-z) = L_B(y) = R(B). \quad (15)$$

另方面, 取 r 充分大, 使开圆 $B_r \supset \bar{B}$. 当 $|x| > r$ 时, 由强马氏性有

$$\begin{aligned} \int_B H_B(x, dz) k(y-z) \\ = \int_{S_r} H_{S_r}(x, d\xi) \int_B H_B(\xi, dz) k(y-z). \end{aligned}$$

如能证明 $\int_B H_B(\xi, dz) k(y-z)$ 对 $|\xi| > r$ 有界, 则由定理 1 (6) 及上式立得

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_B H_B(x, dz) k(y-z) \\ = \int_{S_r} U_r(d\xi) \int_B H_B(\xi, dz) k(y-z) \\ = \int_B \mu_B(dz) k(y-z) = -K\mu_B(y). \quad (16) \end{aligned}$$

(15) (16) 的右方应相等, 故得证(13)对 $x \in \bar{B}$ 也成立. 剩下要证当 $y \in \bar{B}$ 时, $\int_B H_B(\xi, dz) k(y-z)$ 对 $|\xi| > r$ 有界. 为此, 改写(14)为

$$\int_B H_B(\xi, dz) k(y-z) = g_B(\xi, y) + k(y-\xi) - L_B(\xi). \quad (17)$$

因 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{k(y - \xi)}{k(\xi)} = 1$, 故由(12), 对 $y \in \bar{B}$, 当 $|\xi| > r$, r 充分大后, $k(y - \xi) - L_B(\xi)$ 有界. 又由 § 15 定理 1 (iii), $g_B(\xi, y)$ 对 $y \in \bar{B}$, $|\xi| > r$ 有界. 故(17)的右方对 $|\xi| > r$ 有界. 因之其左方也如此.

对非极集的相对紧集 B , 称测度 μ_B 为 B 的平衡测度, 其势 $K\mu_B$ 称为 B 的平衡势, 称常数 $R(B)$ 为 B 的 Robin 常数.

如 B 为相对紧的极集, 则定义 $R(B) = \infty$. 以后会看到, 这样的定义是合理的.

当 B 为紧集时, 由于 $\mu_B = \mu_{\partial B}$; $L_B(x) = L_{\partial B}(x)$, ($x \notin B$) (见 § 14(38)), 自(13)立得

$$R(B) = R(\partial B). \quad (18)$$

例 1. 考虑圆 B_r 及圆周 S_r . 由(10)及上所述得二者的平衡测度都是 S_r 上的均匀分布 U_r ,

$$\mu_{B_r} = \mu_{S_r} = U_r. \quad (19)$$

还可证明:

$$L_{B_r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{如 } |x| \leq r, \\ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{|x|}{r} \right), & \text{如 } |x| > r. \end{cases} \quad (20)$$

实际上, 如 $|x| \leq r$, 由 § 14(37)得 $L_{B_r}(x) = 0$. 今设 $|x| > r$, 在对数势的基本公式 (§ 14(13)) 中, 取 $y = 0$ 得

$$L_{B_r}(x) = k(-x) + g_{B_r}(x, 0) = \int_{B_r} H_{B_r}(x, dz) k(-z). \quad (21)$$

由 § 15 定理 1(v), $g_{B_r}(x, 0) = 0$. 当 $|x| > r$ 时

$$\begin{aligned} \int_{B_r} H_{B_r}(x, dz) k(-z) &= \int_{S_r} H_{S_r}(x, dz) k(-z) \\ &= \int_{S_r} H_{S_r}(x, dz) \frac{1}{\pi} \log r = \frac{1}{\pi} \log r. \end{aligned} \quad (22)$$

于是由(21)得

$$L_{B_r}(x) = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{|x|}{r} \right) = L_{S_r}(x), \quad (|x| > r). \quad (23)$$

由(12)(20)及(18),得 Robin 常数为

$$R(B_r) = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1}{r} \right) = R(S_r). \quad (24)$$

由(13),(24),(20),得平衡势为

$$K\mu_{B_r}(x) = K\mu_{S_r}(x) = \left(\frac{1}{\pi} \right) \log \left(\frac{1}{|x| \vee r} \right), \quad (25)$$

其中 $a \vee b = \max(a, b)$.

§ 17. 平面上的容度

(一) 试研究 Robin 常数的一些性质.

引理 1. 设 A, B 为相对紧集, 则

$$R(A \cup B) + R(A \cap B) \geq R(A) + R(B); \quad (1)$$

又若 $A \subset B$, 则

$$R(A) \geq R(B). \quad (2)$$

证. 设 $A \subset B$, 如 B 为极集, 则 A 必为极集, 于是 $R(A) = R(B) = \infty$. 如 B 非极集, A 为极集, 则(2)显然成立. 如二者皆非极集, 由 $L_B^1(x)$ 的定义 (§ 14, (12)) 以及 $h_A \geq h_B$, 得

$$L_B^1(x) \leq L_A^1(x); \quad L_B(x) \leq L_A(x). \quad (3)$$

于是由 § 16(12)得证(2).

今证(1). 只需对 A, B 皆非极集证明. 由于 $h_{A \cup B} = h_A \vee h_B$, 有¹⁾

$$P_x(h_{A \cup B} \leq t) \leq P_x((h_A \leq t) \cup (h_B \leq t)), \quad (4)$$

1) $h_{A \cap B} \geq h_A \vee h_B$.

$$\begin{aligned}
P_x(h_A \leq t, h_B \leq t) &= P_x(h_A \leq t) + P_x(h_B \leq t) \\
&\quad - P_x((h_A \leq t) \cup (h_B \leq t)) \leq P_x(h_A \leq t) \\
&\quad + P_x(h_B \leq t) - P_x(h_{A \cup B} \leq t).
\end{aligned} \quad (5)$$

由 § 14(12) 得

$$L_{A \cap B}^\lambda(x) \geq L_A^\lambda(x) + L_B^\lambda(x) - L_{A \cup B}^\lambda(x). \quad (6)$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 得

$$L_{A \cap B}(x) \geq L_A(x) + L_B(x) - L_{A \cup B}(x). \quad (7)$$

由 § 16(12) 即得 (1)_#.

定理 1. i) 设 B 为紧集, 则

$$R(B) = \sup(R(U): U \text{ 开}, U \supset B, \bar{U} \text{ 紧}). \quad (8)$$

ii) 设 U 为相对紧开集, 则

$$R(U) = \inf(R(A): A \text{ 紧}, A \subset U). \quad (9)$$

证. i) 设 B 紧. 取一列相对紧开集 $\{B_n\}$,

$$B_1 \supset \bar{B}_2 \supset B_2 \supset \cdots; \quad \bigcap_n B_n = \bigcap_n \bar{B}_n = B.$$

由 § 6 引理 1,

$$P_x(h_{B_n} \uparrow h_B) = 1, \text{ 一切 } x \in B^c \cup B^r. \quad (10)$$

先对 B 为极集的情况证明 (8). 此时 $R(B) = \infty$. 只要证 (8) 之右方也等于 ∞ . 任取 $f \geq 0$; 有紧支集为 D , $D \cap \bar{B}_1 = \emptyset$; 又 f 在 R^2 上之积分为 1. 令

$$Af(z) = \int k(y-z)f(y)dy = \int_D k(y-z)f(y)dy.$$

$\int = \int_{R^2}$. 如 § 16 开头时所述, $Af(z)$ 对 $z \in D^c \supset \bar{B}_1$ 连续, 故在 B_1 上有界. 从而

$$\left| \int_{B_n} H_{B_n}(x, dz) Af(z) \right| \leq \sup_{z \in \bar{B}_1} |Af(z)| = M < \infty. \quad (11)$$

由 § 16 (13), 并注意 $\int f(x)dx = 1$,

$$\int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx + \int L_{B_n}(x)f(x)dx = R(B_n). \quad (12)$$

今欲令 $n \rightarrow \infty$, 如能证右方第一积分有界, 第二积分上升到 ∞ , 则 $R(B_n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 而(8)得证. 为此, 先有

$$\begin{aligned} \left| \int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx \right| &\leq \left| \int Af(x)\mu_{B_n}(dx) \right| \\ &= \left| \int_{B_n} Af(x)\mu_{B_n}(dx) \right| \leq M < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

其次, 为证第二积分 $\uparrow \infty$, 只要证 $L_{B_n}(x) \uparrow \infty$.

利用 § 14(13)及(11), 有

$$\begin{aligned} \left| - \int g_{B_n}(x, y)f(y)dy + L_{B_n}(x) \right| &= \left| Af(x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_n} H_{B_n}(x, dz)Af(z) \right| \leq |Af(x)| \\ &\quad + M < \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

但当 $x \in B^c$ 时, 由(10)

$$\int g_{B_n}(x, y)f(y)dy = E_x \int_0^{h_{B_n}} f(x_t)dt \uparrow E_x \int_0^{h_B} f(x_t)dt. \quad (15)$$

因 B 为极集, $P_x(h_B = \infty) = 1$; 利用二维布朗运动的常返性, 得

$$E_x \int_0^{h_B} f(x_t)dt = E_x \int_0^{\infty} f(x_t)dt = \infty. \quad (16)$$

在(14)中令 $n \rightarrow \infty$, 由(15), (16)可见 $L_{B_n}(x) \uparrow \infty$.

次对非极集 B 证明(8). 此时(12)仍成立. 又

$$\int K\mu_B(x)f(x)dx + \int L_B(x)f(x)dx = R(B).$$

故为证 $R(B_n) \rightarrow R(B)$, 只要证(12)左方二积分分别趋于上式左方二积分. 此时由于 $R(B_n) \leq R(B_{n+1})$, 故必

$R(B_n) \uparrow R(B)$.

对 $x \in B^c \cup B^r$, 仿(15), (16), 有

$$\int g_{B_n}(x, y)f(y)dy \uparrow \int g_B(x, y)f(y)dy. \quad (17)$$

因 $P_x(x(h_{B_n}) \in \bar{B}_1) = 1$, $Af(z)$ 在 \bar{B}_1 中连续, 故由(11)右方及控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_n} iI_{B_n}(x, dz)Af(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_x Af(x(h_{B_n})) \\ &= E_x Af(x(h_B)) = \int_{\bar{B}} H(x, dz)Af(z). \end{aligned} \quad (18)$$

由 § 14(13)及(17)(18)得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_{B_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[Af(x) - \int_{\bar{B}_n} H_{B_n}(x, dz)Af(z) \right. \\ &\quad \left. + \int g_{B_n}(x, y)f(y)dy \right] = Af(x) \\ &\quad - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)Af(z) \\ &\quad + \int g_B(x, y)f(y)dy = L_B(x). \end{aligned} \quad (19)$$

而且由 $L_A \geq L_B$ (如 $A \subset B$) 知, $L_{B_n}(x) \uparrow L_B(x)$. 又因 $B \cap (B^r)^c$ 的 Lebesgue 测度为 0, 得

$$\begin{aligned} \int L_{B_n}(x)f(x)dx &= \int_{B^c \cup B^r} L_{B_n}(x)f(x)dx \\ &\uparrow \int_{B^c \cup B^r} L_B(x)f(x)dx = \int L_B(x)f(x)dx. \end{aligned} \quad (20)$$

剩下要考虑(12)中第一积分. 取圆 $D_r \supset \bar{B}$. 由 § 16(3)及控制收敛定理

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_n} \mu_{B_n}(dx)Af(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} \left[\int_{\bar{D}_r} H_{B_n}(\xi, dx)U_r(d\xi) \right] Af(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_r} \left[\int_{\bar{B}_n} Af(x) H_{B_n}(\xi, dx) \right] U_r(d\xi) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_r} E_\xi Af(x(h_{B_n})) U_r(d\xi) \\
&= \int_{S_r} E_\xi Af(x(h_B)) U_r(d\xi) = \int K_{\mu_B}(x) f(x) dx.
\end{aligned}$$

ii) 只需考虑 U 为非极集情形. 仿 §6, 可找到紧集 $A_n \subset U$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\bigcup_n A_n = U$, 而且 $P_x(h_{A_n} \downarrow h_U) = 1$. 取紧集 D , 使 $D \cap \bar{U}^c = \emptyset$. 又取连续函数 $f \geq 0$, 有紧支集 D , 又 $\int f(x) dx = 1$. 然后仿上述 i) 中对非极集情况之证, 以 A_n 代 B_n , 以 U 代 B , 以 \downarrow 代 \uparrow , 即可得证(9)*.

细看定理 1 的证明(或稍加修改), 我们实际上已证明了:

系 1. i) 如 B_n 紧, $B_n \downarrow B$, 则对 $x \in B^r \cup B^c$, $L_{B_n}(x) \uparrow L_B(x)$; $R(B_n) \uparrow R(B)$.

ii) 如 B_n 紧, $B_n \uparrow B$, B 为相对紧, 则对一切 x , 有 $L_{B_n}(x) \downarrow L_B(x)$; 又 $R(B_n) \downarrow R(B)$.

(二) 以 \mathbf{C} 表 R^2 中全体紧集之集. 定义

$$R^*(c) = -R(c), \quad c \in \mathbf{C}. \quad (21)$$

由(1)(2)及定理 1, 知 $R^*(\cdot)$ 是 \mathbf{C} 上的 Choquet 容度(参看 §9). 由容度的扩张定理, 可把 R^* 的定义域扩大到 \mathscr{B}^2 上(甚至全体解析集上), 使对任意 $B \in \mathscr{B}^2$, 有

$$\begin{aligned}
R^*(B) &= \sup(R^*(c): c \subset B, c \text{ 紧}) \\
&= \inf(R^*(0): 0 \supset B, 0 \text{ 开}).
\end{aligned} \quad (22)$$

并且对任意 Borel 集 A, B , 有

$$R^*(A \cup B) + R^*(A \cap B) \leq R^*(A) + R^*(B). \quad (23)$$

又若 $A \subset B$, 则

$$R^*(A) \leq R^*(B). \quad (24)$$

它们是(1)(2)的延拓.

在 §16 中我们已对相对紧集 A 定义了 Robin 常数 $R(A)$. 今证明 $-R(A)$ 与扩张而得的 $R^*(A)$ 相等. 实际上, 对任意紧集 $c \subset A$, 任意相对紧开集 $0 \supset A$, 有 $-R(c) \leq -R(A) \leq -R(0)$, 故

$$R^*(A) \leq -R(A) \leq R^*(A),$$

即 $R^*(A) = -R(A)$ 对相对紧集 A 成立.

利用 R^* 的扩张自然得到 Robin 常数的扩张: 对任意 $B \in \mathscr{B}^2$, 定义

$$R(B) = -R^*(B). \quad (25)$$

于是关于 $R^*(B)$, ($B \in \mathscr{B}^2$) 的结果, 可以通过 $R(B)$, ($B \in \mathscr{B}^2$) 来表达. 特别, 如(22)可改写为:

对任意 $B \in \mathscr{B}^2$, 有

$$\inf\{R(c): c \subset B, c \text{ 紧}\} = R(B) = \sup\{R(0): 0 \supset B, 0 \text{ 开}\} \quad (26)$$

今对任意 $B \in \mathscr{B}^2$, 定义 B 的容量 $C(B)$ 为

$$C(B) = \exp\{-R(B)\}. \quad (27)$$

例如, 由 §16(24), 圆 B_r 及圆周 S_r 的容量为

$$C(B_r) = C(S_r) = r^{1/\kappa}, \quad (r > 0). \quad (28)$$

容量有下列性质:

- a) 如 $A \subset B$, 则 $C(A) \leq C(B)$.
- b) 如 A 紧, 则 $C(A) = C(\partial A)$.
- c) 如 B_n 紧, $B_n \downarrow B$, 则 $C(B_n) \downarrow C(B)$.
- d) 如 B_n 紧, $B_n \uparrow B$, B 相对紧, 则 $C(B_n) \uparrow C(B)$.

实际上, 由(24)得 a). 由 §14(12), 对 $x \in A$, 有 $L_A^1(x) = L_{\partial A}^1(x)$, 故 $L_A(x) = L_{\partial A}(x)$. 于是由 §16(12) 得 b). 而 c), d) 则由系 1 推出.

显然, $C(B) = 0$ 等价于 $R(B) = \infty$.

(三) **定理 2.** 设 $B \in \mathscr{B}^2$. 则 B 为极集的充要条件是 $C(B) \neq 0$; 换言之, $P_x(h_B < \infty) \equiv 1$ 或 $\equiv 0$, 视 $C(B) > 0$ 或 $= 0$ 而定.

证. 如 B 为相对紧集, 由 $R(B)$ 的定义及 §16 定理 2, 知 $R(B) = \infty$ 与 B 为极集等价. 以下设 B 为非相对紧集. 设 $R(B) = \infty$. 由 (26) 知, $R(c) = \infty$ 对紧集 $c \subset B$ 成立; 再由 (26), $R(D) = \infty$ 对相对紧集 $D \subset B$ 也成立, 于是由上所证知 D 为极集. 由于 B 可表为可列多个相对紧集之和, 故 B 为极集. 反之, 设 B 为极集, 则 B 的每个紧子集 c 为极集, 由上所证 $R(c) = \infty$. 再由 (26) 得 $R(B) = \infty$.

与 §11 定理 5 相应, 有

定理 3. 设 B 为相对紧集, 则 B 为极集的充要条件是

$$\sup_x K\mu(x) = \infty, \quad (29)$$

其中 μ 为任意非 0 有限测度, 支集含于 B .

证. 任取相对紧开集 $A \supset \bar{B}$. 对 $N > 0$, 定义

$$k_N(x) = \begin{cases} k(x), & \text{如 } k(x) \geq -N; \\ -N, & \text{如 } k(x) < -N. \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} &= \int \mu(dx) \int k_N(y-x) \mu_A(dy) \\ &= \int \mu_A(dy) \int k_N(y-x) \mu(dx). \end{aligned}$$

令 $N \uparrow \infty$, 由单调收敛定理

$$\int_B \mu(dx) K\mu_A(x) = \int_A \mu_A(dx) K\mu(x). \quad (30)$$

由 §14(12), 如 $x \in \bar{B}$, 则 $L_B^1(x) = L_B(x) = 0$. 因 $\bar{B} \subset A$, 由 §16(13), 左方等于

$$\int_B R(A) \mu(dx) = \int_B L_A(x) \mu(dx) = R(A) \mu(\bar{B}).$$

据此式及(30),得

$$R(A)\mu(\bar{B}) \leq \sup_x K\mu(x) \cdot \mu_A(\bar{A}) = \sup_x K\mu(x).$$

由(26) $R(B)\mu(\bar{B}) \leq \sup_x K\mu(x)$.

今如 B 为极集, 则 $R(B) = \infty$, 故 $\sup_x K\mu(x) = \infty$.

反之, 设 $\sup_x K\mu(x) = \infty$ 对满足定理条件的一切 μ 成立, 则 B 必为极集. 否则, 如说 B 非极集, 即 $R(B) < \infty$; 取 B 的平衡测度 μ_B , 它满足定理条件. 但由 § 16(13)

$$K\mu_B(x) \leq R(B) < \infty, \text{ 一切 } x.$$

此与假设矛盾.

§ 18. 结 束 语

(一) M. Brelot 认为: 势论中有三大问题: Dirichlet 问题、Balayage 问题与平衡问题. 在牛顿势与对数势的情况, 我们对这些问题作了简要论述, 阐明了它们与布朗运动的关系以及其概率解法. 但势论中还有许多问题, 如可加泛函、能、Martin 边界等, 则未涉及.

(二) 牛顿势的一般化是格林 (Green) 势. 设 D 为 $R^n (n \geq 3)$ 中的开集, 其格林函数为 $G_D^*(x, y)$, $(x, y \in D)$. 如 $D = R^n$, $G_D^*(x, y)$ 等于牛顿势核 $g(y - x)$. 在一般情况, 可以仿照牛顿势而在 D 上建立格林势:

$$G_D\mu(x) = \int G_D^*(x, y)\mu(dy), \quad (\mu \subset D).$$

它所对应的过程是首出 D 以前的布朗运动 $\{x_t(\omega), t < e_D\}$, e_D 为 D 的首出时. 于是也可以研究格林势的平衡问题等等.

(三) 受布朗运动的启发, Hunt 等发展了一般马氏过程

(主要是所谓 Hunt 过程)与势论的联系. 为此, 必须给出“势论”的一般定义; 讨论那些可以用马氏过程的术语来表达的势论对象和运算. 例如, 联系于每一马氏过程有它的“调和函数”“过剩函数”, 当此过程为布朗运动时, 它们就分别化为本书中的调和函数与非负上调和函数.

本书的主要参考文章为[15, 16]; 关于上述发展可见文献[11, 1, 8, 17, 18]以及新近的有关文献.

参 考 文 献

- [1] Blumenthal, R. M. and Gettoor, R. K., Markov processes and potential theory, 1968.
- [2] Burkholder, D. L., Brownian motion and classical analysis. Proceedings of Symp. in Pure Mathematics, Probability, **31**, 5—14, (1977).
- [2₁] Burkholder, D. L., Exit times of Brownian motion, harmonic majorization and Hardy Spaces, *Adv. in Math.*, **26**, 182—205, (1977).
- [3] Chung, K. L. Probabilistic approach in potential theory to the equilibrium problem, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **23**, No. 3, 313—322. (1973).
- [4] Ciesielski, Z. and Taylor, S. J., First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the Sample path, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**, 434—50, (1962).
- [5] Гихман, и. и., Скороход А. В., Теория случайных процессов, Том. 2, 1973.
- [6] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Vol. 2, 1962. (有中译本).
- [7] Doob, J. L., Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. math. Soc.* **77**, 86—121. (1954).
- [8] Dynkin, E. B., Markov processes, 1965.
- [9] Friedman, A., Stochastic differential equations and applications, 1975.
- [10] Gettoor, R. K., The Brownian escape process, *Ann. of Probability*, **7**, 5, 864—867, (1979).
- [10₁] Gettoor, R. K., Sharpe, M. J. Excursions of Brownian motions and Bessel processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **47**, 1, 83—106, (1979).
- [11] Hunt, G. A., Markoff processes and potentials I, II, III, *Illinois J. Math.*, **1**, 44—93; 316—69; (1957); **2**, 151—213, (1958).
- [12] Ito, K., and McKean, H. P., Diffusion processes and their sample path. 1965.
- [13] Kakutani, S., Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20**, 706—714. (1944).
- [14] Kaar, A. F. and Pittenger A. O., An inverse Balayage problem for Brownian motion, *Ann. of Probability*, **7**, 1, 186—191, (1979).

- [15] Port, S. and Stone, C., Classical potential theory and Brownian motion, *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math Stat. and Probability*, 143—176, (1972).
- [16] Port, S. and Stone, C., Logarithmic potential and planar Brownian motion, *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability*, 177—192, (1972).
- [17] Port, S. C. and Stone, C. J., Brownian motion and classical potential theory, 1978.
- [18] Rao, M., Brownian motion and classical potential theory, 1977.
- [19] Spitzer, F. L., Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3, 110—121, (1964).
- [20] Тихонов А. Н. Самарский А. А., Уравнения Математической физики 1953.
- [21] 王梓坤, 布朗运动的末遇分布与极大游程, 中国科学, 10, 933—940, (1980).
- [22] 王梓坤, 随机过程论, 1965, 科学出版社.
- [23] 王梓坤, 对称稳定过程与布朗运动的随机游, 中国科学, 12 801—806 (1982).
- [24] Дынкин, Е. Б., Основания теории Марковских процессов, 1962. (有中译本: 马尔科夫过程论基础).
- [25] La Vallée Poussin, CH. J. De, L'extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 2(1932), 169—232.